Über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT SEKTION II

DER

KGL. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

HANS HAMBURGER
AUS BERLIN

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

BERLIN 1914
UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON GUSTAV SCHADE (OTTO FRANCKE)
LINIENSTRASSE 158

Der hohen Fakultät eingereicht: 9. März 1914

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Mai 1914

Referent: Herr Professor Pringsheim

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

Kapitel I. Asymptotischer Ausdruck für ein Integral einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten sich nach ganzen negativen Potenzen von x entwickeln lassen. 10

§ 1. Problemstellung für das Kapitel I. Einführung der wesentlichen Bezeichnungen . 10

§ 2. Konstruktion des Integrals y_λ 13

§ 3. Vorbereitende Abschätzungen 20

§ 4. Beweis, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ in $\mathfrak{G}^{(m)}$ gleichmäßig konvergiert und ein Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist 24

§ 5. Beweis, daß $y_\lambda \sim S_\lambda$ ist. Abschätzung für y_λ. Bedingungen, unter denen diese Abschätzungen für ein beliebiges Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ gelten . 28

Kapitel II. Untersuchungen über Integrale von Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind. 34

§ 1. Die Laplacesche Transformation 35

§ 2. Aufstellung der Integralgleichung, die mit der Laplaceschen transformierten Differentialgleichung äquivalent ist. Abschätzung von $v(t)$ für endliche Werte des Argumentes 38

§ 3. Abschätzung von $v(t)$ für reelle negative Werte des Argumentes von großem absoluten Betrage 44

§ 4. Transformation der Integrationsveränderlichen t 46

Kapitel III. Der Grenzübergang $m = \infty$ in der Differentialgleichung $P_m(y) = 0$. . . . 49

§ 1. Der Grenzübergang bei den formalen Reihen 49

§ 2. Beweis, daß die Potenzreihe für $w(s)$ im Inneren des Einheitskreises konvergiert, und daß $\lim_{m=\infty} w_m(s) = w(s)$ ist 52

§ 3. Beweis, daß $y = \lim_{m=\infty} y_m$ existiert und ein Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist. Entwicklung von y in eine konvergente Fakultätenreihe 56

Schlußbemerkung 61

Nachtrag. Zusammenhang der Birkhoffschen Resultate mit denen unserer Arbeit 64

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547407_0046

Einleitung.

Es sei folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung vorgelegt:

$$\text{(A)} \qquad P(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_0(x)\, y = 0,$$

deren Koeffizienten

$$\text{(1)} \qquad p_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^\mu$$

Potenzreihen sein mögen, die sämtlich für

$$\text{(2)} \qquad |x| > R$$

konvergieren, eventuell sich aber auch gleichzeitig über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzen lassen.

Wir setzen ferner ein für alle Male als wesentlich voraus, daß die zur Differentialgleichung (A) gehörige sogenannte charakteristische Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \alpha^n + a_{0,n-1}\, \alpha^{n-1} + a_{0,n-2}\, \alpha^{n-2} + \ldots + a_{00} = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln besitzt.

Die Stelle $x = \infty$ ist dann in der Poincaréschen Bezeichnungsweise für die Differentialgleichung (A) eine Stelle der Unbestimmtheit vom Range eins. Thomé hat nun für diesen Fall n linear unabhängige Reihen angegeben, die der Differentialgleichung (A) formal genügen, ohne indessen zu konvergieren. Diese Reihen sind von der Form

$$\text{(4)} \qquad S_\lambda = e^{\alpha_\lambda x}\, x^{\rho_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Hierbei sind die α_λ die n verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (3).

Falls die Koeffizienten $p_\nu(x)$ der Differentialgleichung (A) rationale Funktionen sind, hat Poincaré in einer grundlegenden Arbeit im 8. Bande der Acta Mathematica bewiesen, daß die Differentialgleichung (A) ein Fundamentalsystem von Integralen y_λ besitzt, derart, daß

$$\text{(5)} \qquad y_\lambda \sim S_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Das Zeichen $\sim$, asymptotisch gleich, bedeutet in der Definition von Poincaré, daß

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} x^{\rho_\lambda} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{x}\right)^\mu + R_m(x) \tag{6}$$

ist, wobei $R_m(x)$ für jedes m der Beziehung

$$\lim_{x=\infty} x^m R_m(x) = 0 \tag{7}$$

genügt[1]).

In mehreren Arbeiten (z. B. Band 4 des Arch. für Math. u. Phys., 3. Reihe, S. 213 bis 230, insbesondere aber Band 133 und Band 138 von Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik) hat sich Herr Horn von der Voraussetzung, daß die Koeffizienten $p_\nu(x)$ rationale Funktionen sind, befreit und mittels einer von der Poincaréschen wesentlich verschiedenen Methode die Beziehung (5) auch für den Fall bewiesen, daß die Koeffizienten beliebige Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind. Allerdings beschränkt sich Herr Horn für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung darauf, das Verhalten von y_λ für reelle positive x zu untersuchen. Wir werden im ersten Kapitel unserer Arbeit seine Ausführungen dahin ergänzen, daß wir die Gültigkeit von (5) auch für komplexe x nachweisen werden, wofern x innerhalb eines gewissen Winkelraumes der komplexen Ebene gelegen ist, dessen Winkelöffnung gleich $\pi + 2\tau$ ist; hierbei bedeutet τ einen von 0 verschiedenen spitzen Winkel. Gleichzeitig wird sich für die Werte von

$$y_\lambda e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda}$$

innerhalb dieses Gebietes eine obere Schranke ergeben, die nur von den Maximalwerten der Koeffizienten p_ν in diesem Gebiete abhängt. Diese Abschätzung wird uns im folgenden nützlich werden.

Mit der Beziehung (5) ist aber für y_λ noch kein expliziter Ausdruck gegeben; indessen findet sich auch ein solcher in der zitierten Poincaréschen Arbeit, aber wieder nur für den Fall, daß die Koeffizienten p_ν rationale Funktionen von x sind. Er stellt nämlich y_λ in der Form eines bestimmten Schleifenintegrales dar

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} \int_{\mathfrak{L}} e^{x t} v_\lambda(t)\, dt \tag{8}$$

Hierbei ist $v_\lambda(t)$ in der Umgebung der Stelle $t = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar, deren Koeffizienten durch die Koeffizienten von S_λ eindeutig bestimmt sind. Wir werden die Hauptpunkte dieser Theorie in Kapitel II § 2 kurz zusammenfassen.

---

[1]) Genauer müßte es nach der Poincaréschen Bezeichnungsweise heißen

$$y_\lambda e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_{\lambda\mu}}{x^\mu}$$

doch wollen wir im folgenden der Kürze halber einfach $y_\lambda \sim S_\lambda$ schreiben.

In einer kürzlich im 71. Bande der math. Annalen erschienenen Arbeit entwickelt nun Herr Horn den Ausdruck (8) in eine konvergente Fakultätenreihe und hat damit für das Integral y_λ eine elegante explizite Form gefunden.

Im II. und III. Kapitel unserer Abreit suchen wir diese Sätze von Poicaré und Herrn Horn auch auf den Fall auszudehnen, daß die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung als beliebige Potenzreihen in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = \infty$ vorausgesetzt sind. Eine solche Ergänzung der Poincaréschen Theorie erscheint deshalb als wünschenswert, weil man bei allen Fragen, die sich auf das Verhalten des Integrals einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung in der Umgebung eines Punktes beziehen, naturgemäß bestrebt sein muß, dieses Verhalten allein aus dem Verhalten der Koeffizienten der Differentialgleichung in der Umgebung des betrachteten Punktes zu schließen, ohne dabei den analytischen Charakter der Koeffizienten in den übrigen Teilen der Ebene mit in Anschlag zu bringen.

Der Nachweis unserer Behauptungen gelingt uns, indem wir die Differentialgleichung (A) als Grenzfall von Differentialgleichungen auffassen, deren Koeffizienten Polynome von $\frac{1}{x}$ sind.

Kapitel I.

Asymptotischer Ausdruck für ein Integral einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung n^ter Ordnung, deren Koeffizienten sich nach ganzen negativen Potenzen von x entwickeln lassen.

§ 1.

Problemstellung für das I. Kapitel, Einführung der wesentlichen Bezeichnungen.

Es sei die lineare Differentialgleichung (A) der Einleitung vorgelegt, deren Koeffizienten sich für $|x| > R$ nach ganzen negativen Potenzen von x entwickeln lassen, also in einer gewissen Umgebung des Punktes $x = \infty$ reguläre analytische Funktionen sind.

Dann existieren im allgemeinen n von einander linear unabhängige, meist divergente Potenzreihen, die sogenannten Thoméschen Normalreihen, von der Form

$$S_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} x^{\varrho_\lambda} \sum_{\iota=0}^{\infty} A_{\lambda\iota} \left(\frac{1}{x}\right)^\iota \tag{4}$$

die der Differentialgleichung (A) formal genügen; und zwar bestimmen sich die α_λ, ϱ_λ, $A_{\lambda\iota}$ nun folgendermaßen. Man differentiiere die Reihe S_λ formal genügend oft nach x und setze die so erhaltenen Reihen in die Differentialgleichung (A) ein. So erhält man die Reihe

$$P(S_\lambda) = e^{\alpha_\lambda x} x^{\varrho_\lambda} \left(C_{\lambda 0} + \frac{C_{\lambda 1}}{x} + \frac{C_{\lambda 2}}{x^2} + \ldots.\right) \tag{9}$$

Die Werte für α_λ, ϱ_λ, $A_{\lambda\iota}$ werden nun nacheinander berechnet, indem man die einzelnen $C_{\lambda\iota} = 0$ setzt; und zwar ist

$$C_{\lambda 0} = \alpha_\lambda^n + a_{0,n-1}\alpha_\lambda^{n-1} + \ldots. + a_{00} \tag{10}$$

Diese Gleichung nennen wir die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (A). Wir setzen im folgenden als wesentlich voraus, daß die charakteristische Gleichung keine mehrfachen Wurzeln besitzt. Dies ist auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu der Differentialgleichung (A) n linear unabhängige Reihen S_λ von der Form (4) gehören, die diese formal befriedigen.

Nach Annahme einer bestimmten Wurzel α_λ liefert uns die Gleichung $C_{\lambda\iota} = 0$ einen einzigen Wert für ϱ_λ. Hierauf ergeben sich auf eindeutige Weise die Werte für $A_{\lambda 1} \ldots A_{\lambda m}$ aus den Gleichungen $C_{\lambda 2} = 0 \ldots . C_{\lambda, m+1} = 0$. Die Größen $C_{\lambda 0}$, $C_{\lambda 1}$, $\ldots . C_{\lambda, m+1}$ hängen also nicht von den Größen $A_{\lambda, m+1}$, $A_{\lambda, m+2} \ldots .$ ab.

Wir führen mit Herrn Horn[1]) folgende Funktionen ein:

$$\Phi_\varkappa(x) = 1 + \frac{A_{\varkappa 1}}{x} + \ldots . + \frac{A_{\varkappa m}}{x^m} \tag{11}$$

$$\varphi_\varkappa(x) = e^{\alpha_\varkappa x} x^{\varrho_\varkappa} \Phi_\varkappa(x) \tag{12}$$

Die Wronskysche Determinante Δ der Funktionen $\varphi_1 \ldots . \varphi_n$ läßt sich, wie leicht erkennbar, in der Form darstellen

$$\Delta = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_n) x}\, x^{\rho_1 + \rho_2 + \ldots . + \rho_n}\, \Phi(x) \tag{13}$$

wo Φ ein Polynom vom Grade $m\,n + \frac{n(n-1)}{2}$ in $\frac{1}{x}$ bedeutet, das für $x = \infty$ den Wert

$$\begin{vmatrix} 1, \alpha_1, \ldots ., \alpha_1^{n-1} \\ 1, \alpha_2, \ldots ., \alpha_2^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1, \alpha_n, \ldots ., \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

annimmt, und dieser Wert ist von 0 verschieden, da die charakteristische Gleichung (10) keine mehrfachen Wurzeln besitzt.

Wir definieren jetzt die Funktionen $\psi_\varkappa(x)$ $\left(\text{bei Herrn Horn } \frac{\Delta_\varkappa}{\Delta}\right)$ durch das System linearer Gleichungen

$$\begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_\varkappa^{(\nu)}(x)\ \psi_\varkappa(x) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots ., n-2) \\ \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_\varkappa^{(n-1)}(x)\ \psi_\varkappa(x) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Man erkennt leicht, daß die $\psi_\varkappa$ von folgender Gestalt sind

$$\psi_\varkappa = e^{-\alpha_\varkappa x} x^{-\rho_\varkappa} \mathfrak{p}_\varkappa(x) \tag{15}$$

Hierbei sind die $\mathfrak{p}_\varkappa(x)$ Funktionen, die an den endlich vielen Nullstellen der Funktion $\Phi(x)$ Pole haben können, sonst aber sich in demselben Bereiche wie die $\Phi_\varkappa(x)$ regulär analytisch verhalten.

---

[1]) Vgl. Crelles Journal Band 138, S. 174—184.

Wir definieren jetzt ein Gebiet $\mathfrak{G}_\omega$ mit der Randkurve $\mathfrak{C}_\omega$ folgendermaßen: Von dem Punkte $x = \gamma e^{i\omega}$ werden zwei Strahlen zum Punkte ∞ geführt, die mit der Achse der positiven reellen Zahlen den $\sphericalangle\, \omega + \frac{\pi}{2} + \tau$ bzw. $\sphericalangle\, \omega - \frac{\pi}{2} - \tau$ bilden. Hierbei bezeichnet ω einen ganz beliebigen Winkel, der nur der Bedingung unterworfen ist, daß $(2k+1)\pi - \omega$, unter k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl verstanden, von allen Größen arc $(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)$ verschieden sei. Durch diese beiden Strahlen, die zusammen die Kurve $\mathfrak{C}_\omega$ bilden mögen, wird die Ebene in zwei Gebiete geteilt. Das Gebiet $\mathfrak{G}_\omega$ sei dasjenige der beiden Bereiche, das die Punkte

$$x = r e^{i\omega} \qquad (r \geqq \gamma)$$

enthält (siehe Fig. 1); γ und τ seien nun so gewählt, daß die Koeffizienten $p_\nu(x)$ in $\mathfrak{G}_\omega$ und auf dem Rande $\mathfrak{C}_\omega$ noch regulär sind, und daß ferner keine der Nullstellen von $\Phi(x)$

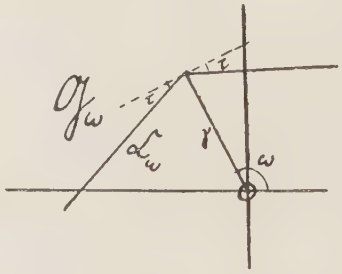


Fig. 1.

auf $\mathfrak{C}_\omega$ liegt; hierbei sei aber τ jedenfalls ein von 0 verschiedener positiver spitzer Winkel, der weiter unten nach oben hin beschränkt werden wird. Unter $\mathfrak{G}_\omega^{(m)}$ verstehen wir nun dasjenige Gebiet, das entsteht, wenn wir die Nullstellen von Φ, die, wie wir oben gesehen haben, alle im Endlichen gelegen sind, mit kleinen Kreisen umgeben und wir diese, soweit sie im Innern von $\mathfrak{G}_\omega$ liegen, aus diesem Gebiete herausheben. Die Funktionen $\Phi_\lambda(x)$, $\mathfrak{p}_\varkappa(x)$, $p_\nu(x)$ sind also in $\mathfrak{G}_\omega^{(m)}$ und auf dem Rande analytisch.

Es sei nunmehr in $\mathfrak{G}_\omega$ und auf $\mathfrak{C}_\omega$

$$\left| x^2 \left(p_\nu(x) - a_{\nu 0} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right| \leqq \mathfrak{M} \tag{16}$$

Wir geben im folgenden zur Konstruktion eines Integrals von (A) ein Verfahren an, das in $\mathfrak{G}_\omega^{(m)}$ und auf der Begrenzung konvergiert, und für dasselbe Gebiet der Beziehung

$$y_\lambda \sim S_\lambda \tag{5}$$

genügt. Gleichzeitig liefert uns dies Verfahren eine Abschätzung für dieses Integral, die nur von den $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$ und $\mathfrak{M}$ abhängt und im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}_\omega^{(m)}$ inklusive des Randes gilt.

§ 2.

Konstruktion des Integrals y_λ.

Die Funktionen $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ genügen einer gewissen Differentialgleichung

$$D_1(y) \equiv \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y, & y', & \ldots, & y^{(n)} \\ \varphi_1, & \varphi_1', & \ldots, & \varphi_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n, & \varphi_n', & \ldots, & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Bilden wir jetzt den Ausdruck

$$P(\varphi_\varkappa) = e^{\alpha_\varkappa x} x^{\rho_\varkappa}\left(C^*_{\varkappa 0} + \frac{C^*_{\varkappa 1}}{x} + \frac{C^*_{\varkappa 2}}{x^2} + \ldots.\right)$$

Aus der in § 1 erwähnten Tatsache, daß die $C_{\varkappa 0} \ldots C_{\varkappa, m+1}$ nur von den Größen $A_{\varkappa 1} \ldots A_{\varkappa m}$, nicht aber von $A_{\varkappa, m+1}$, $A_{\varkappa, m+2} \ldots$. abhängen, folgt, daß

$$C^*_{\varkappa 0} = C_{\varkappa 0}, \ldots, \quad C^*_{\varkappa, m+1} = C_{\varkappa, m+1}$$

wird, also verschwindet.
Wir können daher

$$P(\varphi_\varkappa) = -e^{\alpha_\varkappa x} x^{\rho_\varkappa} - m - 2\, \mathfrak{q}_\varkappa(x)$$

setzen. Hierbei ist $\mathfrak{q}_\varkappa(x)$ in $\mathfrak{G}_\omega$ den Rand und den Punkt $x = \infty$ inklusive eine reguläre analytische Funktion.

Setzen wir

$$D_2(y) = D_1(y) - P(y), \tag{18}$$

so wird wegen $D_1(\varphi_\varkappa) = 0$

$$\begin{aligned} D_2(\varphi_\varkappa) &= -P(\varphi_\varkappa) \\ &= e^{\alpha_\varkappa x} x^{\rho_\varkappa} - m - 2\, \mathfrak{q}_\varkappa(x) \end{aligned} \tag{19}$$

Hierbei ist $D_2(y)$ eine lineare Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Bei den folgenden Ausführungen wollen wir uns auf den Fall $\omega = 0$ beschränken, da wir auf letzteren alle Fälle durch die einfache Substitution

$$x' = x\, e^{-i\omega}$$

zurückführen können. Dann geht die für ω in § 1 angegebene Beschränkung in die Bedingung über, daß arc $(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)$ von $(2k+1)\pi$ verschieden sein soll. Dies werde hier vorausgesetzt. Wir schreiben im folgenden einfach $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^{(m)}$, $\mathfrak{C}$ statt $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0^{(m)}$, $\mathfrak{C}_0$.

Wir setzen jetzt

$$u_0 = \varphi_\lambda(x) = e^{\alpha_\lambda x} x^{\rho_\lambda} \Phi_\lambda(x), \tag{20}$$

dann ist

$$D_2(u_0) = e^{\alpha_\lambda x} x^{\rho_\lambda - m - 2} F_0(x), \tag{21}$$

wobei

$$F_0(x) = \mathfrak{q}_\lambda(x). \tag{22}$$

Wir bestimmen jetzt eine unendliche Reihe von Funktionen $u_\nu(x)$ durch die Rekursionsformel

$$u_{\nu+1}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_\varkappa(x) \int_{\xi_\varkappa}^{x} D_2[u_\nu(t)]\, \psi_\varkappa(t)\, dt. \tag{23}$$

Hierbei sind die $\xi_\varkappa$ gewisse Konstanten, über die weiter unten ebenso wie über den innerhalb $\mathfrak{G}^{(m)}$ gelegenen Integrationsweg passend verfügt werden wird.

Wir behaupten dann, daß, wenn x in $\mathfrak{G}^{(m)}$ gelegen ist, $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ konvergiert und das gewünschte Integral y_λ der Differentialgleichung (A) darstellt.

Aus (23) folgt leicht unter Berücksichtigung von (14)

$$D_2(u_{\nu+1}) = \sum_{\varkappa=1}^{n} D_2[\varphi_\varkappa(x)] \int_{\xi_\varkappa}^{x} D_2[u_\nu(t)]\, \psi_\varkappa(t)\, dt \tag{24}$$

$$\begin{aligned} D_1(u_{\nu+1}) &= D_2(u_\nu) + \sum_{\varkappa=1}^{n} D_1[\varphi_\varkappa(x)] \int_{\xi_\varkappa}^{x} D_2[u_\nu(t)]\, \psi_\varkappa(t)\, dt \\ &= D_2(u_\nu). \end{aligned} \tag{25}$$

Wir führen jetzt die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda = \beta_\varkappa \qquad \varrho_\varkappa - \varrho_\lambda = \sigma_\varkappa. \tag{26}$$

Setzen wir ferner

$$D_2(u_\lambda) = e^{\alpha_\lambda x} x^{\rho_\lambda - m - 2} F_\nu(x), \tag{27}$$

so erhalten wir unter Benutzung von (12), (15), (19), (23), (24) und (26) folgende Rekursionsformeln:

$$u_{\nu+1}(x)\, e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{\beta_\varkappa x} x^{\sigma_\varkappa} \Phi_\varkappa(x) \int_{\xi_\varkappa}^{x} e^{-\beta_\varkappa t} t^{-\sigma_\varkappa - m - 2} F_\nu(t)\, \mathfrak{p}_\varkappa(t)\, dt \tag{28}$$

und

$$F_{\nu+1}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{\beta_\varkappa x} x^{\sigma_\varkappa} \mathfrak{q}_\varkappa(x) \int_{\xi_\varkappa}^{x} e^{-\beta_\varkappa t} t^{-\sigma_\varkappa - m - 2} F_\nu(t)\, \mathfrak{p}_\varkappa(t)\, dt. \tag{29}$$

Soweit der Hornsche Ansatz in Crelles Journal Band 138; es handelt sich für uns nun darum, die Integrationswege passend zu wählen, damit $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ in $\mathfrak{G}^{(m)}$ konvergiert. Zuvor aber transformieren wir die Integrale (29).

Es sei

$$x = r\, e^{i\vartheta}$$

ein Punkt von $\mathfrak{G}^{(m)}$. Es sei ferner

(30) $$\beta_\varkappa = \mathfrak{r}_\varkappa\, e^{i\,\omega_\varkappa}.$$

Wir wählen für $\omega_\varkappa$ einen Wert, so daß

$$-\pi < \omega_\varkappa < +\pi.$$

Nach den oben gemachten Voraussetzungen ist dann

$$|\omega_\varkappa| \neq \pi.$$

Wir führen nunmehr in (29) folgende Substitutionen aus:

(31)
$$\begin{aligned} x_\varkappa &= \beta_\varkappa\, x = r\,\mathfrak{r}_\varkappa\, e^{i(\vartheta+\omega_\varkappa)} & t_\varkappa &= \beta_\varkappa\, t \quad \text{wenn } \varkappa \neq \lambda \\ x_\lambda &= x & t_\lambda &= t \end{aligned}$$

Dann wird

(32)
$$\begin{aligned} F_{\nu+1}(x) &= \sum_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa\neq\lambda}}^{n} \mathfrak{q}_\varkappa\left(\frac{x_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right) \int_{\xi_\varkappa\beta_\varkappa}^{x_\varkappa} e^{x_\varkappa - t_\varkappa}\left(\frac{x_\varkappa}{t_\varkappa}\right)^{\sigma_\varkappa}\left(\frac{\beta_\varkappa}{t_\varkappa}\right)^{m+2} F_\nu\left(\frac{t_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right)\mathfrak{p}_\varkappa\left(\frac{t_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right)\frac{dt_\varkappa}{\beta_\varkappa} + \\ &\quad + \mathfrak{q}_\lambda(x_\lambda)\int_{\xi_\lambda}^{x_\lambda} t_\lambda^{-m-2} F_\nu(t_\lambda)\,\mathfrak{p}_\varkappa(t_\lambda)\,dt_\lambda \\ &= \sum_{\varkappa=1}^{n} J_{\nu+1,\varkappa}(x_\varkappa). \end{aligned}$$

Die $x_\varkappa$ sind nunmehr Punkte eines Gebietes $\mathfrak{G}_\varkappa^{(m)}$, das abgesehen von seinen Durchlöcherungen, durch 2 Strahlen begrenzt wird, die vom Punkte $\gamma\,\mathfrak{r}_\varkappa\, e^{i\omega_\varkappa}$ ins unendlich Ferne gehen und mit der Achse der reellen Zahlen den $\sphericalangle\ \omega_\varkappa + \frac{\pi}{2} + \tau$ bzw. $\sphericalangle\ \omega_\varkappa - \frac{\pi}{2} - \tau$ bilden.

Unter diesen $\omega_\varkappa$ möge es einige Größen $\omega_{\varkappa'}$ geben, deren absoluter Betrag größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Wir setzen diese $\omega_{\varkappa'}$ in der Form an

(33) $$|\omega_{\varkappa'}| = \frac{\pi}{2} + \lambda_{\varkappa'}$$

Sei Λ das größte unter diesen $\lambda_{\varkappa'}$, so wählen wir

(34) $$\tau < \frac{\pi}{2} - \Lambda$$

(35) $$\tau < \Lambda$$

Wir teilen jetzt von dem Gebiete $\mathfrak{G}_x^{(m)}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}_{x1}^{(m)}$ ab, dessen Punkte der Ungleichung

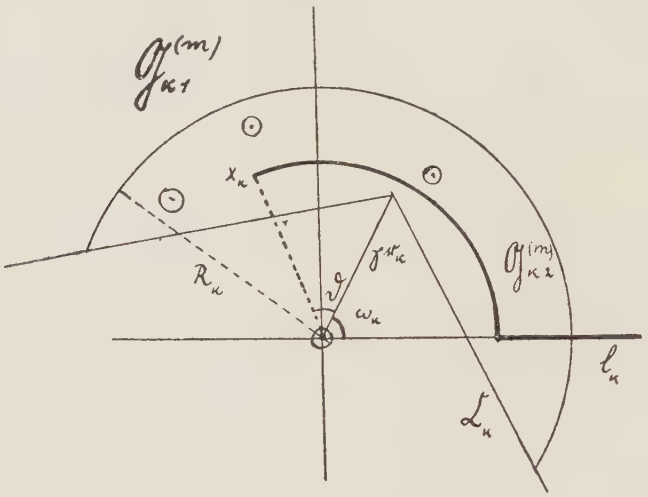
(36) $$|x_x| \geqq R_x$$

genügen sollen. R_x sei jedenfalls so gewählt, daß die Entwicklung von $\mathfrak{p}_x(x)$ nach negativen ganzen Potenzen von x für $|x| \geqq R_x$ konvergiert, und daß der Punkt der reellen Achse $R_x \cos(\tau + \Lambda)$ wirklich im Innern von $\mathfrak{G}_x^{(m)}$ gelegen ist.

Wir werden im folgenden R_x noch durch weitere Bedingungen nach unten beschränken.

Mit $\mathfrak{G}_{x2}^{(m)}$ bezeichnen wir das Gebiet $\mathfrak{G}_x^{(m)} - \mathfrak{G}_{x1}^{(m)}$.

Wir bestimmen nun folgendermaßen für jedes Integral $J_{\nu+1,x}(x_x)$ von (32) den Integrationsweg l_x, der von dem zu dem Index $\varkappa$ gehörigen $\sphericalangle\, \omega_x$ abhängen wird.



(I, 1.) Fig. 2.

(I.) Es sei zunächst

$$|\omega_x| < \frac{\pi}{2} + \tau.$$

Dann enthält $\mathfrak{G}_x^{(m)}$ einen Teil der Achse der positiven reellen Zahlen.

(I, 1.) Sei jetzt x ein Punkt von $\mathfrak{G}_{x2}^{(m)}$, so führen wir unseren Integrationsweg l_x längs der Achse der reellen Zahlen vom unendlich fernen Punkte, solange l_x in $\mathfrak{G}_{x1}^{(m)}$ läuft. In $\mathfrak{G}_{x2}^{(m)}$ setzen wir l_x beliebig bis zum Punkte x_x fort. (Vgl. Fig. 2.)

(I, 2.) x sei nun in $\mathfrak{G}_{x1}^{(m)}$ gelegen; ist nun

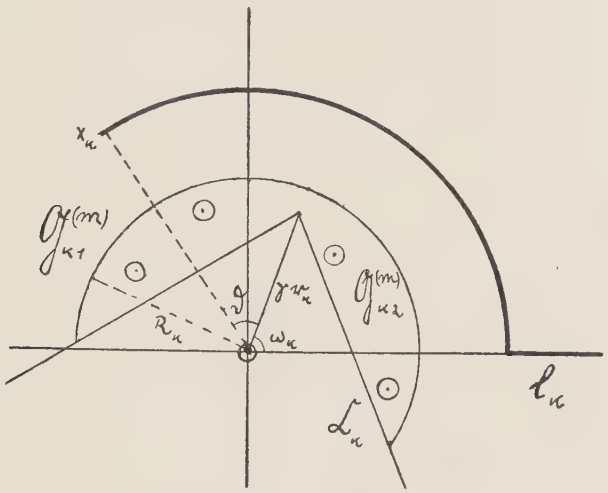
$$|\omega_x + \vartheta| < \pi,$$

so führen wir unseren Integrationsweg l_x längs der Achse der positiven reellen Zahlen vom Punkte ∞ bis zum Punkte $|x_x|$ und dann längs eines Kreisbogens um den 0-Punkt als Kreismittelpunkt mit dem Radius $|x_x|$ bis zum Punkte x_x.

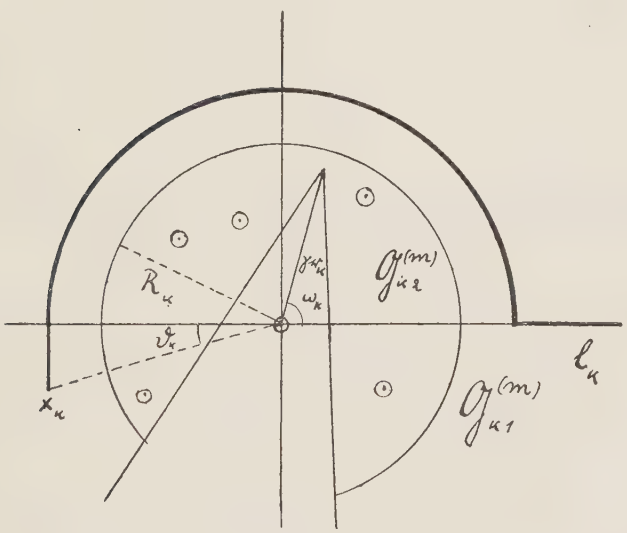
(I, 3.) Ist jetzt

$$|\omega_\varkappa + \vartheta| = \pi + \vartheta_\varkappa \tag{37}$$

und ist $x_\varkappa$ ein Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}_{\varkappa 1}^{(m)}$, so führen wir unseren Integrationsweg zunächst längs der Achse der positiven reellen Zahlen vom Punkte ∞ bis zum Punkte $|x_\varkappa| \cos \vartheta_\varkappa$.



(I, 2.) Fig. 3.



(I, 3.) Fig. 4.

Der Punkt $|x_\varkappa| \cos \vartheta_\varkappa$ liegt wegen

$$|\omega_\varkappa + \vartheta| \leqq \frac{\pi}{2} + \lambda_\varkappa + \frac{\pi}{2} + \tau$$

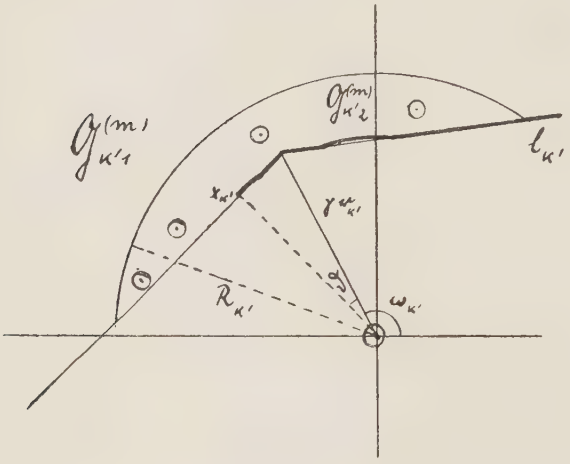
$$\vartheta_\varkappa \leqq \tau + \Lambda \tag{38}$$

$$|x_\varkappa| \cos \vartheta_\varkappa \geqq |x_\varkappa| \cos (\tau + \Lambda)$$
$$\geqq R_\varkappa \cos (\tau + \Lambda)$$

wirklich in $\mathfrak{G}_\varkappa^{(m)}$. Wir setzen nunmehr $l_\varkappa$ längs eines Halbkreises um den Nullpunkt fort, welcher gleichfalls in $\mathfrak{G}_\varkappa^{(m)}$ liegen möge; auf diese Weise haben wir $l_\varkappa$ bis zum Punkte $-|x_\varkappa| \cos \vartheta_\varkappa$ geführt; diesen Punkt verbinden wir schließlich noch auf geradlinigem Wege, der der Achse der imaginären Zahlen parallel laufen wird, mit dem Punkte $x_\varkappa$.

(II.) Es sei jetzt

$$(39) \qquad \begin{cases} |\omega_{\varkappa'}| = \dfrac{\pi}{2} + \lambda_{\varkappa'} & \lambda_{\varkappa'} > \tau \\ \lambda_{\varkappa'} - \tau = \mu_{\varkappa'} \end{cases}$$



(II, 1.) Fig. 5.

Dann liegt die Achse der reellen Zahlen nicht mehr innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}_{\varkappa'}^{(m)}$, sondern $\mathfrak{G}_{\varkappa'}^{(m)}$ liegt im Innern eines Winkelraumes, der durch die Ungleichungen

$$(40) \qquad \begin{cases} \mu_{\varkappa'} \leqq \arg x_{\varkappa'} \leqq \pi + \tau + \lambda_{\varkappa'} < \dfrac{3\pi}{2} \\ \text{bzw. } -\mu_{\varkappa'} \geqq \arg x_{\varkappa'} \geqq -(\pi + \tau + \lambda_{\varkappa'}) > -\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

abgegrenzt wird, je nachdem $\omega_{\varkappa'}$ positiv oder negativ ist. Um einen bestimmten Fall ins Auge zu fassen, nehmen wir an:

$$\omega_{\varkappa'} > 0$$

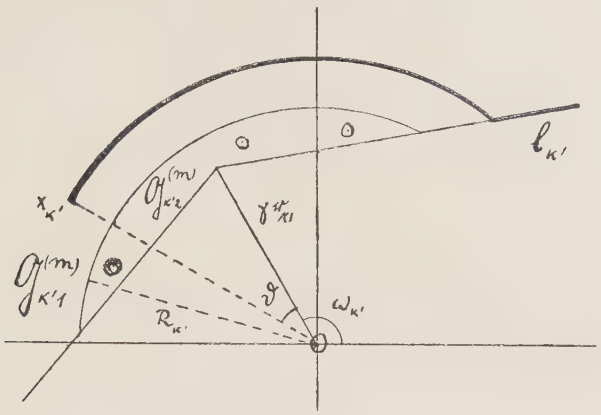
Für $\omega_{\varkappa'} < 0$ sind die Untersuchungen entsprechend durchzuführen. $R_{\varkappa'}$ genüge noch der Ungleichung

$$R_{\varkappa'} \geqq \gamma r_{\varkappa'}.$$

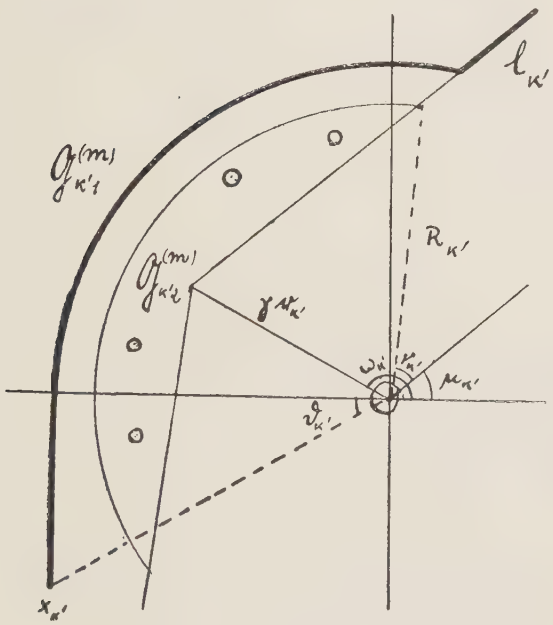
(II, 1, 2.) Es sei jetzt $x_{\varkappa'}$ ein Punkt von $\mathfrak{G}_{\varkappa' 2}^{(m)}$ oder wenn es in $\mathfrak{G}_{\varkappa' 1}^{(m)}$ gelegen ist, so sei

$$\omega_{\varkappa'} + \vartheta < \pi,$$

Dann führen wir unseren Integrationsweg $l_{\varkappa'}$ längs desjenigen Strahles der Begrenzung von $\mathfrak{G}_{\varkappa'}^{(m)}$, der mit der Achse der positiven reellen Zahlen den $\sphericalangle \mu_{\varkappa'}$ bildet, vom Punkte ∞ bis zu einem Punkte, der vom Nullpunkte die Entfernung $|x_{\varkappa'}|$ hat und dann längs



(II, 2.) Fig. 6.



(II, 3.) Fig. 7.

eines Kreisbogens um den Nullpunkt mit dem Radius $|x_{\varkappa'}|$ bis zum Punkte $x_{\varkappa'}$. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß wenn $l_{\varkappa'}$ durch $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa' 2}$ läuft, der Weg den ausgehobenen Stellen ausweichen und die Kreisbogen, die aus $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa'}$ herausfallen, durch Streckenstücke, die auf der Begrenzung $\mathfrak{E}_{\varkappa'}$ liegen, ersetzen muß (vgl. Fig. 5).

(II, 3.) Liegt $x_{\varkappa'}$ in $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa' 1}$, ist aber

$$\omega_{\varkappa'} = \pi + \vartheta_{\varkappa'},$$

wobei wegen (40) $\vartheta_{\varkappa'}$ der Ungleichung (38) genügen muß, so führen wir längs desselben Strahles wie in (II, 1, 2) unseren Weg vom Punkte ∞ bis zu einem Punkte, der die Entfernung $|x_{\varkappa'}| \cos \vartheta_{\varkappa'}$ vom Nullpunkte hat, dann längs eines Halbkreises innerhalb $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa'}$ um den Nullpunkt mit dem Radius $|x_{\varkappa'}| \cos \vartheta_{\varkappa'}$ bis zum Punkte $- |x_{\varkappa'}| \cos \vartheta_{\varkappa'}$ und endlich längs einer Parallelen zur Achse der imaginären Zahlen bis zum Punkte $x_{\varkappa'}$.

Der Integrationsweg liegt also in allen Fällen im Innern von $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa}$ oder auf dem Rande.

§ 3.

Vorbereitende Abschätzungen.

Es sei in $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa}$ inklusive des Randes

$$|\Phi_{\varkappa}(x)| \leqq \mathfrak{N}, \qquad |\mathfrak{p}_{\varkappa}(x)| \leqq M, \qquad |\mathfrak{q}_{\varkappa}(x)| \leqq N, \tag{41}$$

Wir suchen jetzt mit Hilfe von $F_{\nu}(x)$, M, N, $\mathfrak{N}$, m und n die einzelnen Integrale $J_{\nu+1,\varkappa}$ abzuschätzen, wenn x in $\mathfrak{G}^{(m)}$ bzw. $x_{\varkappa}$ in $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa}$ gelegen ist, und zwar wollen wir zu diesem Zwecke in diesem Paragraphen zunächst die Beschränktheit der Funktion

$$\Psi_{\varkappa}(x_{\varkappa}, t_{\varkappa}) = e^{x_{\varkappa} - t_{\varkappa}} \left(\frac{x_{\varkappa}}{t_{\varkappa}}\right)^{\sigma_{\varkappa}} \qquad \varkappa \neq \lambda \tag{42}$$

nachweisen, wenn $x_{\varkappa}$ ein Punkt von $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa}$ und $t_{\varkappa}$ auf einem Integrationswege $l_{\varkappa}$ gelegen ist[1]).

Für $\varkappa = \lambda$ setzen wir

$$\Psi_{\lambda}(x_{\lambda}, t_{\lambda}) = 1.$$

Es seien zunächst $x_{\varkappa}$ und $t_{\varkappa}$ beide in $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa 2}$ gelegen; dann ist $\Psi_{\varkappa}(x_{\varkappa}, t_{\varkappa})$ eine stetige Funktion, also kann man sicher eine Größe $H_{\varkappa}$ angeben, derart, daß

$$|\Psi_{\varkappa}(x_{\varkappa}, t_{\varkappa})| \leqq H_{\varkappa}, \qquad \text{wenn } |x_{\varkappa}| \leqq R_{\varkappa}, \quad |t_{\varkappa}| \leqq R_{\varkappa} \tag{43}$$

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} t_{\varkappa} &= \varrho e^{i\theta} \\ \sigma_{\varkappa} &= \sigma'_{\varkappa} + i\sigma''_{\varkappa} \end{aligned} \tag{44}$$

Es sei jetzt $x_{\varkappa}$ ein Punkt von $\mathfrak{G}^{(m)}_{\varkappa 1}$ und $t_{\varkappa}$ auf einem der Kreisbogen gelegen. Dann ist unter Berücksichtigung von (31)

$$|\Psi_{\varkappa}(x_{\varkappa}, t_{\varkappa})| = e^{r\tau_{\varkappa}} [\cos(\vartheta + \omega_{\varkappa}) - \cos\theta] - \sigma''_{\varkappa}(\omega_{\varkappa} + \vartheta - \theta) \tag{45}$$

---

[1]) Vgl. die Hornsche Arbeit in Crelles Journal Band 133, S. 24—26.

wenn

$$|\omega_\varkappa + \vartheta| \leqq \pi$$

da dann

$$|x_\varkappa| = |t_\varkappa|,$$

Hierbei nimmt $|\Theta|$ von 0 bzw. einem Winkel, der um etwas größer als $|\mu_\varkappa|$ ist, monoton bis $|\vartheta + \omega_\varkappa|$ ab, das heißt die Differenz

$$\cos(\vartheta + \omega_\varkappa) - \cos\Theta$$

bleibt beständig negativ und nimmt von $\cos(\vartheta + \omega_\varkappa) - 1$ bzw. $\cos(\vartheta + \omega_\varkappa) - \cos(\mu_\varkappa + \delta)$ bis 0 monoton zu. Wir finden also für diesen Fall

$$|\Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)| \leqq e^{|\sigma_\varkappa''|(\pi + 2\tau)} \tag{46}$$

da

$$|\omega_\varkappa + \vartheta - \Theta| = \left|\arg \frac{x_\varkappa}{t_\varkappa}\right| \leqq \pi + 2\tau.$$

Ist aber

$$\omega_\varkappa + \vartheta = \pi + \vartheta_\varkappa$$

und ist $x_\varkappa$ ein Punkt von $\mathfrak{G}_{\varkappa 1}^{(m)}$, so ist, da $\dfrac{|x_\varkappa|}{|t_\varkappa|} = \dfrac{1}{\cos\vartheta_\varkappa}$,

$$|\Psi_\varkappa| = e^{-r\mathfrak{r}_\varkappa \cos\vartheta_\varkappa - r\mathfrak{r}_\varkappa \cos\vartheta_\varkappa \cos\theta} \left(\frac{1}{\cos\vartheta_\varkappa}\right)^{\sigma_\varkappa'} e^{-\sigma_\varkappa''(\pi + \vartheta_\varkappa - \theta)}. \tag{47}$$

Es nimmt jetzt $\cos\Theta$ von $+1$ bzw. $\cos(\mu_\varkappa + \delta)$ bis -1 monoton ab, also

$$-r\mathfrak{r}_\varkappa \cos\vartheta_\varkappa (1 + \cos\Theta) \leqq 0,$$

Ferner ist, wie oben gezeigt, wegen (38)

$$\frac{1}{\cos\vartheta_\varkappa} \leqq \frac{1}{\cos(\tau + \Lambda)}.$$

Daraus folgt aber

$$|\Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)| \leqq \left(\frac{1}{\cos(\tau + \Lambda)}\right)^{|\sigma_\varkappa'|} e^{|\sigma_\varkappa''|(\pi + 2\tau)} \tag{48}$$

Liegt jetzt $t_\varkappa$ auf einer der Parallelen zur Achse der rein imaginären Zahlen, so wird der reelle Teil von $x_\varkappa - t_\varkappa$ gleich 0. Dann wird $\Theta \geqq \pi$. Setzen wir für den Augenblick

$$\Theta = \pi + \Theta',$$

so erhalten wir

$$x_\varkappa = -|x_\varkappa| e^{i\vartheta_\varkappa}$$

$$t_\varkappa = -|x_\varkappa| \frac{\cos\vartheta_\varkappa}{\cos\Theta'} e^{i\theta'}$$

und dann folglich

$$|\Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)| = \left(\frac{\cos\vartheta_\varkappa}{\cos\Theta'}\right)^{\sigma_\varkappa'} e^{-\sigma_\varkappa''(\vartheta_\varkappa - \theta')} \tag{49}$$

Es ist nun

$$0 \leqq \Theta' \leqq \vartheta_\varkappa, \quad \cos(\tau + \Lambda) \leqq \frac{\cos\vartheta_\varkappa}{\cos\Theta'} \leqq 1,$$

folglich

$$|\Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)| \leqq \cos(\tau + \Lambda)^{-|\sigma_\varkappa'|} e^{|\sigma_\varkappa''|(\tau + \Lambda)} \tag{50}$$

Es bleibt nun noch der Fall zu erledigen, daß $t_\varkappa$ in $\mathfrak{G}_{\varkappa 1}^{(m)}$ entweder auf der Achse der reellen Zahlen oder im Falle $|\omega_{\varkappa'}| > \frac{\pi}{2} + \tau$ auf einem der Strahlen gelegen ist, die $\mathfrak{G}_{\varkappa'}^{(m)}$ begrenzen, während $x_\varkappa$ beliebig ist.

Dann ist

$$|\Psi_\varkappa| = e^{\mathfrak{r}_\varkappa r\cos(\omega_\varkappa + \vartheta) - \rho\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho)} \left(\frac{\mathfrak{r}_\varkappa r}{\varrho}\right)^{\sigma_\varkappa'} e^{-\sigma_\varkappa''(\omega_\varkappa + \vartheta - \mu_\varkappa - \delta_\rho)}. \tag{51}$$

Hierbei bedeutet δ_ρ eine von ϱ abhängige Zahl, die bei abnehmendem ϱ monoton von 0 bis $\nu_\varkappa - \mu_\varkappa$ zunimmt. ($\nu_\varkappa$ bezeichnet den Winkel, den die Achse der positiven reellen Zahlen mit der Geraden bildet, auf der der Nullpunkt und der $\mathfrak{G}_{\varkappa 1}^{(m)}$ und $\mathfrak{G}_{\varkappa 2}^{(m)}$ gemeinsame Punkt des Begrenzungsstrahls von $\mathfrak{G}_\varkappa^{(m)}$ liegen. $R_\varkappa$ sei nun groß genug gewählt, damit $\nu_\varkappa$ ein spitzer Winkel ist. Vgl. Fig. II,3).

ϱ genügt der Ungleichung

$$\varrho \geqq \mathfrak{r}_\varkappa r\cos\vartheta_\varkappa, \tag{52}$$

während r größer als eine von 0 verschiedene positive Zahl bleibt. $\vartheta_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$ sind die Größen der Gleichungen (37) und (39), wenn

$$|\omega_\varkappa + \vartheta| > \pi, \qquad |\omega_\varkappa| > \frac{\pi}{2} + \tau,$$

im anderen Falle sind $\mu_\varkappa$ und $\vartheta_\varkappa$ gleich 0 zu setzen.

Ist jetzt

$$\sigma_\varkappa' \geqq 0,$$

so ist

$$|\Psi_\varkappa| \leqq e^{\mathfrak{r}_\varkappa r[\cos(\omega_\varkappa + \vartheta) - \cos\vartheta_\varkappa\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho)]} \left(\frac{\mathfrak{r}_\varkappa r}{\varrho}\right)^{\sigma_\varkappa'} e^{|\sigma_\varkappa''|(\pi + \Lambda + \tau + \nu_\varkappa)}. \tag{53}$$

Da nun

$$\cos(\omega_\varkappa + \vartheta) - \cos\vartheta_\varkappa\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho) \leqq 0$$

und wegen (52)

$$\frac{\mathfrak{r}_\varkappa r}{\varrho} \leqq \frac{1}{\cos\vartheta_\varkappa} \leqq \frac{1}{\cos(\tau + \Lambda)}$$

ist, so finden wir

$$|\Psi_\varkappa| \leqq \left(\frac{1}{\cos(\tau + \Lambda)}\right)^{\sigma'_\varkappa} e^{|\sigma''_\varkappa|(\pi + \Lambda + \tau + \nu_\varkappa)}. \tag{54}$$

Etwas komplizierter gestaltet sich die Untersuchung für den Fall

$$\sigma'_\varkappa < 0$$

Es bleibt dann, wenn $\vartheta_\varkappa \neq 0$, beständig,

$$\cos(\omega_\varkappa + \vartheta) - \cos\vartheta_\varkappa \cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho) < 0$$

In diesem Falle verschwindet also $\Psi_\varkappa$, wenn eine der Größen r oder ϱ oder beide unendlich groß werden. Da also $\Psi_\varkappa$ stetig bleibt, so ist es erst recht beschränkt.

Ist $\vartheta_\varkappa = 0$, so wird jedenfalls wegen $\delta_{r\mathfrak{r}_\varkappa} \geqq \delta_\rho$

$$|\Psi_\varkappa| \leqq e^{\mathfrak{r}_\varkappa r \cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho) - \varrho\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho)} \left(\frac{\mathfrak{r}_\varkappa r}{\varrho}\right)^{\sigma'_\varkappa} e^{|\sigma''_\varkappa|(\pi + \nu_\varkappa)} \tag{55}$$

Sei h eine beliebige positive reelle Zahl > 1. Ist jetzt

$$\frac{\varrho}{\mathfrak{r}_\varkappa r} \leqq h$$

so bleibt der Ausdruck auf der rechten Seite von (55) beschränkt, da dann

$$\left(\frac{\mathfrak{r}_\varkappa r}{\varrho}\right)^{\sigma'_\varkappa} \leqq h^{|\sigma'_\varkappa|} \tag{56}$$

ist und wegen

$$\varrho \geqq r\,\mathfrak{r}_\varkappa\,, \qquad \mu_\varkappa + \delta_\rho \leqq \nu_\varkappa < \frac{\pi}{2}$$

der Ausdruck

$$\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho)(\mathfrak{r}_\varkappa r - \varrho) \leqq 0$$

bleibt.

Im anderen Falle wird

$$\mathfrak{r}_\varkappa r \leqq \frac{\varrho}{h}$$

folglich:

$$|\Psi_\varkappa| \leqq e^{\cos(\mu_\varkappa + \delta_\rho)\varrho\left(\frac{1}{h} - 1\right)} \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{r}_\varkappa r}\right)^{|\sigma'_\varkappa|} e^{|\sigma''_\varkappa|(\pi + \nu_\varkappa)} \tag{57}$$

Der Ausdruck rechts von (57) bleibt aber wiederum beschränkt; denn für $\varrho = \infty$ verschwindet die Exponentialfunktion von viel höherer Ordnung, als $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{r}_\varkappa r}\right)^{|\sigma'_\varkappa|}$ unendlich groß wird.

Hiermit ist für alle Fälle — (43), (46), (48), (50), (54), (56), und (57) — bewiesen, daß eine Konstante H gefunden werden kann, derart, daß

$$|\Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)| \leq H \tag{58}$$

wenn $x_\varkappa$ in $\mathfrak{G}_\varkappa^{(m)}$ und $t_\varkappa$ auf $l_\varkappa$ liegt. H hängt nur von den Größen $\alpha_\varkappa$ und $\varrho_\varkappa$, ferner von der Gestalt von $\mathfrak{G}^{(m)}$ ab.

§ 4.

Beweis, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ in $\mathfrak{G}^{(m)}$ gleichmäßig konvergiert, und ein Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ ist.

Nach Formel (32) war

$$(59)\quad \begin{cases} J_{\nu+1,\varkappa}(x_\varkappa) = \mathfrak{q}_\varkappa\left(\dfrac{x_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right)\displaystyle\int_{l_\varkappa} \Psi_\varkappa(x_\varkappa, t_\varkappa)\left(\frac{\beta_\varkappa}{t_\varkappa}\right)^{m+2} F_\nu\left(\frac{t_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right)\mathfrak{p}_\varkappa\left(\frac{t_\varkappa}{\beta_\varkappa}\right)\frac{dt_\varkappa}{\beta_\varkappa} & (\varkappa \neq \lambda) \\ J_{\nu+1,\varkappa}(x) = \mathfrak{q}_\varkappa(x)\displaystyle\int_{l_\varkappa^*} \Psi_\varkappa(\beta_\varkappa x, \beta_\varkappa t_\varkappa)\left(\frac{1}{t}\right)^{m+2} F_\nu(t)\,\mathfrak{p}_\varkappa(t)\,dt & (\varkappa = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

wobei unter $l_\varkappa^*$ der Integrationsweg zu verstehen ist, in den $l_\varkappa$ durch die Substitution (31) $t = \dfrac{t_\varkappa}{\beta_\varkappa}$ transformiert wird.

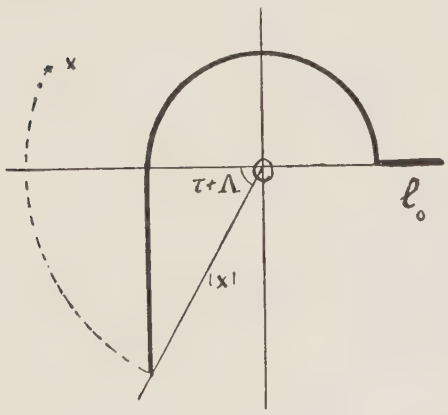


Fig. 8.

Unter Benutzung von (41) und (58) finden wir

$$|J_{\nu+1,\varkappa}| \leq H\,M\,N \int_{l_\varkappa^*} |F_\nu(t)| \left|\frac{dt}{t^{m+2}}\right| \tag{60}$$

Wir setzen jetzt

$$L_\varkappa(x) = \int_{l_\varkappa^*} \left|\frac{dt}{t^{m+2}}\right| \tag{61}$$

Sei jetzt R' die größte der Zahlen $\dfrac{R_\varkappa}{\mathfrak{r}_\varkappa}$. Wird jetzt $R_\varkappa$ dahin abgeändert, daß es gleich $R'\mathfrak{r}_\varkappa$ gesetzt wird, so werden die $R_\varkappa$ in zulässiger Weise vergrößert; ferner werden alle Gebiete $\mathfrak{G}_{\varkappa 1}^{(m)}$ und $\mathfrak{G}_{\varkappa 2}^{(m)}$ durch die Substitution (31) unabhängig von $\varkappa$ in die Gebiete $\mathfrak{G}_{(1)}^{(m)}$, $\mathfrak{G}_{(2)}^{(m)}$ übergeführt, die durch einen Kreisbogen des Kreises $|x| = R'$ voneinander getrennt werden.

Verstehen wir unter c eine passend gewählte Konstante > 1 und unter l_0 einen Integrationsweg, der längs der Achse der reellen Zahlen vom Punkte ∞ bis zum Punkte $|x| \cos(\tau + \Lambda)$, dann längs eines Halbkreises bis zum Punkte $-|x| \cos(\tau + \Lambda)$ und endlich parallel zur Achse der imaginären Zahlen bis zum Punkte $|x|\, e^{i(\pi+\tau+\Lambda)}$ führt, so

ist jedenfalls, wenn $|x| \geq R'$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} L_\varkappa(x) \leq n \int_{l_0} \left| \frac{c\,dt}{t^{m+2}} \right| \tag{62}$$

Ist $|x| \leq R'$, so war der Integrationsweg $l_\varkappa$ bzw. $l_\varkappa^*$ soweit er in $\mathfrak{G}_{2\varkappa}^{(m)}$ bzw. $\mathfrak{G}_{(2)}^{(m)}$ verlief, nicht näher beschrieben worden. Er kann nun aber immer so gewählt werden, daß auch für Punkte x aus $\mathfrak{G}_{(2)}^{(m)}$ die Ungleichung (62) für alle $\varkappa$ erfüllt ist.

Wenn man

$$L(x) = n \int_{l_0} \left| \frac{c\,dt}{t^{m+2}} \right|$$

setzt, so findet man leicht

$$L(x) \leq \frac{K}{|x|^{m+1}} \tag{63}$$

Hierbei ist

$$K \leq n\,c\,\frac{\dfrac{1}{m+1} + \pi + \tau + \Lambda}{\cos^{m+1}(\tau + \Lambda)}$$

(vgl. die zitierte Hornsche Arbeit Crelles Journal Band 133, S. 24 und S. 33, 34).

$L(x)$ hängt nur von dem absoluten Betrage von x ab und nimmt monoton zu, wenn $|x|$ abnimmt.

Es ist nunmehr

$$|F_0(x)| \leq N \tag{64}$$

$$|F_1(x)| = \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} J_{1\varkappa}(\beta_\varkappa x) \right|$$

$$\leq N \cdot H\,M\,N \cdot L(x) \tag{65}$$

Durch vollständige Induktion finden wir nun aber

$$|F_\nu(x)| \leq N\,(H\,M\,N)^\nu \frac{L^\nu(x)}{\nu!} \tag{66}$$

Setzen wir nämlich diesen Wert in (60) ein, so folgt zunächst

$$|F_{\nu+1}| = \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} J_{\nu+1,\varkappa} \right|$$

$$\leq \frac{N\,(H\,M\,N)^{\nu+1}}{\nu!} \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{l_\varkappa^*} L^\nu(t) \left| \frac{dt}{t^{m+2}} \right|$$

$$\leq \frac{N\,(H\,M\,N)^{\nu+1}}{\nu!}\, n \int_{l_0} L^\nu(t) \left| \frac{dt}{t^{m+2}} \right|$$

Es ist aber

$$n\left|\frac{c\,dt}{t^{m+2}}\right| = dL$$

folglich

$$n\int_{l_0} L^{\nu}(t)\left|\frac{c\,dt}{t^{m+2}}\right| = \int_{l_0} L^{\nu}(t)\,dL$$

$$= \frac{L^{\nu+1}(x)}{\nu+1}$$

Folglich ist in der Tat

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq N(H\,M\,N)^{\nu+1}\frac{L^{\nu+1}(x)}{(\nu+1)!}$$

Mit Hilfe von (63) erhält man nun

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{N}{(\nu+1)!}\left(H\,M\,N\,\frac{K}{|x|^{m+1}}\right)^{\nu+1} \tag{67}$$

Andererseits war

$$u_{\nu+1}(x)\,e^{-\alpha_\lambda x}\,x^{-\rho_\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{n}\Phi_\varkappa(x)\int_{l_\varkappa^*}\Psi_\varkappa(\beta_\varkappa x,\beta_\varkappa t)\,F_\nu(t)\,\mathfrak{p}_\varkappa(t)\,\frac{dt}{t^{m+2}} \tag{68}$$

Daraus folgt unter Benutzung von (66) und (67) entsprechend wie oben

$$\left|u_{\nu+1}(x)\,e^{-\alpha_\lambda x}\,x^{-\rho_\lambda}\right| \leqq \mathfrak{N}\,\frac{\left(H\,M\,N\,\frac{K}{|x|^{m+1}}\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \tag{69}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{N}}{(\nu+1)!}\left(H\,M\,N\,\frac{K}{\gamma^{m+1}}\right)^{\nu+1}$$

Ferner ist wegen (14) und (23)

$$u_{\nu+1}^{(\mu)}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_\varkappa^{(\mu)}(x)\int_{l_\varkappa^*} D_2[u_\nu(t)]\,\Psi_\varkappa(t)\,dt \qquad (\mu = 0, 1 \ldots . n-1)$$

$$u_{\nu+1}^{(n)}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_\varkappa^{(n)}(x)\int_{l_\varkappa^*} D_2[u_\nu(t)]\,\Psi_\varkappa(t)\,dt + D_2[u_\nu(x)]$$

und wenn wir setzen

$$\Phi_{\mu\varkappa}(x) = \varphi_\varkappa^{(\mu)}(x)\,e^{-\alpha_\lambda x}\,x^{-\rho_\lambda} \qquad (\mu = 0, 1 \ldots . n) \tag{70}$$

so wird unter Berücksichtigung von (27) und (28)

$$(71)\quad \begin{cases} u_{\nu+1}^{(\mu)}(x)\, e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} \\ \qquad = \sum_{\varkappa=1}^{n} \Phi_{\mu\varkappa}(x) \int_{l_\varkappa^*} \Psi_\varkappa(\beta_\varkappa x, \beta_\varkappa t)\, F_\nu(t)\, \mathfrak{p}_\varkappa(t)\, \frac{dt}{t^{m+2}} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1) \\ u_{\nu+1}^{(n)}\, e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho} = x^{-m-2} F_\nu(x) + \sum_{\varkappa=1}^{n} \Phi_{n\varkappa}(x) \int_{l_\varkappa^*} \Psi_\varkappa(\beta_\varkappa x, \beta_\varkappa t)\, F_\nu(t)\, \mathfrak{p}_\varkappa(t)\, \frac{dt}{t^{m+2}} \end{cases}$$

$\Phi_{\mu\varkappa}(x)$ ist in $\mathfrak{G}^{(m)}$ eine stetige Funktion; sei $\mathfrak{N}_\mu$ ihre obere Grenze, so ergibt die Abschätzung von (71)

$$(72)\quad \begin{cases} \left| u_{\nu+1}^{(\mu)}(x)\, e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} \right| \leq \frac{\mathfrak{N}_\mu}{\nu+1!} \left(H M N \frac{K}{\gamma^{m+1}} \right)^{\nu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1) \\ \left| u_{\nu+1}^{(n)}(x)\, e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} \right| \leq \frac{1}{(\nu+1)!} \left(\mathfrak{N}_\mu + \frac{\nu+1}{H M K \gamma} \right) \left(H M N \frac{K}{\gamma^{m+1}} \right)^{\nu+1} \end{cases}$$

Es sei jetzt

$$U_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu+1}^{(\mu)}(x)$$

dann folgt aus (69) und (72), daß die Reihe für U_μ in jedem endlichen Teilgebiete von $\mathfrak{G}^{(m)}$ gleichmäßig konvergiert. Hiermit ist aber bewiesen, daß

$$(73)\quad U_\mu = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu+1} \right)^{(\mu)} = U_0^{(\mu)}$$

Aus (25) folgt nun

$$D_1(U_0) = D_2(U_0 + u_0)$$

Setzen wir jetzt

$$(74)\quad y_\lambda = u_0 + U_0$$

so ist wegen $D_1(u_0) = 0$

$$D_1(y_\lambda) = D_2(y_\lambda)$$

das heißt aber wegen der Definition (18) von $D_2(y)$ nichts anders als

$$(75)\quad P(y_\lambda) = 0$$

y_λ ist also eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

§ 5.

Beweis, daß $y_\lambda \sim S_\lambda$ ist. Abschätzung für y_λ. Bedingungen, unter denen diese Abschätzung für ein beliebiges Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$ gilt.

Aus Formel (69) und (74) findet man

(76)
$$\left|U_0(x)\, e^{-\alpha_\lambda x}\, x^{-\rho_\lambda}\right| \leqq \mathfrak{N}\left(e^{\frac{H\,M\,N\,K}{|x|^{m+1}}} - 1\right)$$

$$\left|y_\lambda(x)\, e^{-\alpha_\lambda x}\, x^{-\rho_\lambda}\right| \leqq \mathfrak{N}\, e^{\frac{H\,M\,N\,K}{\gamma^{m+1}}}$$

Daraus folgt aber

(77)
$$\lim_{x=\infty} x^m \left|U_0(x)\, e^{-\alpha_\lambda x}\, x^{-\rho_\lambda}\right| = 0.$$

Hiermit ist aber die Existenz eines Integrals y_λ der Differentialgleichung (A) bewiesen, das die Bedingung erfüllt

(5)
$$y_\lambda \sim S_\lambda$$

für den Fall, daß

$$-\frac{\pi}{2} - \tau \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} + \tau$$

Denn es ist nach der Bezeichnungsweise der Formel (6) der Einleitung

$$u_0(x) = e^{\alpha_\lambda x}\, x^{\rho_\lambda} \sum_{\iota=0}^{m} A_{\lambda\iota} \left(\frac{1}{x}\right)^\iota$$

$$U_0(x) = e^{\alpha_\lambda x}\, x^{\rho_\lambda} R_m(x)$$

und Formel (77) sagt das Erfülltsein der Bedingung (7) aus.

Wir betrachten jetzt den Fall

$$\mathrm{m} = 0,$$

dann wird

$$\mathfrak{G}^{(m)} = \mathfrak{G}^{(0)}, \qquad \varphi_\varkappa(x) = e^{\alpha_\varkappa x}\, x^{\rho_\varkappa}, \qquad \Phi_\varkappa(x) = 1$$

also auch $N = 1$.

Die Zahlen M, H, K hängen dann nur von den $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$ und der Wahl von $\mathfrak{G}^{(0)}$ ab.

Die Zahl N war eine obere Schranke für die Funktion

$$\left|e^{-\alpha_\varkappa x}\, x^{-\rho_\varkappa + 2}\, P(\varphi_\varkappa)\right|$$

Es bezeichne für den Augenblick $\Phi_{\nu\varkappa}^{(0)}$ die Funktion

$$x^{-\rho_\varkappa} e^{-\alpha_\varkappa x} \left(\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{\alpha_\varkappa x}\, x^{\rho_\varkappa}\right)$$

Wir zerlegen nunmehr $\Phi_{\nu\varkappa}^{(0)}(x)$ und $p_\nu(x)$, indem wir setzen

$$p_\nu(x) = a_{\nu 0} + \frac{a_{\nu 1}}{x} + \frac{p_\nu^*(x)}{x^2}$$

$$\Phi_{\nu\varkappa}^{(0)}(x) = \alpha_\varkappa^\nu + \frac{\nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu+1}}{x} + \frac{\Phi_{\nu\varkappa}^*(x)}{x^2}$$

Dann wird

$$e^{-a_\varkappa x}\, x^{-\rho_\varkappa+2}\, P(\varphi_\varkappa) = \sum_{\nu=0}^{n} x^2 \left(a_{\nu 0}\,\alpha_\varkappa^\nu + \frac{a_{\nu 1}\,\alpha_\varkappa^\nu + \nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu-1}}{x} \right) + a_{\nu 1}\,\nu\,\varrho_\varkappa\,\alpha_\varkappa^{\nu-1} + p_\nu^*\,\alpha_\varkappa^\nu +$$
$$+ \Phi_{\nu\varkappa}^*\, a_{\nu 0} + \frac{1}{x}\left(\nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu-1} p_\nu^* + \Phi_{\nu\varkappa}^*\, a_{\nu 1}\right) + \frac{1}{x^2}\, p_\nu^*\, \Phi_{\nu\varkappa}^*$$

Es ist aber, wie wir am Anfang von § 2 gezeigt haben,

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu 0}\,\alpha_\varkappa^\nu = C_{\varkappa 0} = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu 1}\,\alpha_\varkappa^\nu + \nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu-1} = C_{\varkappa 1} = 0$$

Es sei jetzt $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke der Funktionen $p_\nu^*(x)$ in $\mathfrak{G}^{(0)}$, $\mathfrak{N}_0$ eine obere Schranke der Funktionen $\Phi_{\nu\varkappa}^*(x)$ in $\mathfrak{G}^{(0)}$.

Dann erhalten wir

$$\left|e^{-a_\varkappa x}\, x^{-\rho_\varkappa+2}\, P(\varphi_\varkappa)\right| \leq \sum_{\nu=0}^{n} \left|a_{\nu 1}\,\nu\,\varrho_\varkappa\,\alpha_\varkappa^{\nu-1}\right| + \mathfrak{N}_0 \left|\frac{a_{\nu 1}}{\gamma} + a_{\nu 0}\right| +$$
$$+ \mathfrak{M}\left|\alpha_\varkappa^\nu\right| + \left|\frac{\nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu-1}}{\gamma}\right| + \frac{n+1}{\gamma^2}\,\mathfrak{N}_0\Bigg)$$

Diese Formel gibt uns nun einen für das Folgende brauchbaren Wert von N.

Setzen wir endlich

$$(78)\qquad \begin{cases} \gamma\, Q_0 = \left(\sum_{\nu=0}^{n} \left|a_{\nu 1}\,\nu\,\varrho_\varkappa\,\alpha_\varkappa^{\nu-1}\right| + \mathfrak{N}_0 \left|a_{\nu 0} + \frac{a_{\nu 1}}{\gamma}\right| \right) M\,H\,K \\ \gamma\, Q_1 = \left(\sum_{\nu=0}^{n} \left|\alpha_\varkappa^\nu\right| + \left|\frac{\nu\,\varrho_\varkappa \alpha_\varkappa^{\nu-1}}{\gamma}\right| + \frac{n+1}{\gamma^2}\,\mathfrak{N}_0 \right) M\,H\,K \end{cases}$$

so wird $Q_0 + Q_1\,\mathfrak{M} = \dfrac{\mathfrak{N}}{\gamma}\, H\,M\,N\,K.$

Man hat also nach (76)

$$(79)\qquad \left|y_\lambda\, e^{-a_\lambda x}\, x^{-\rho_\lambda}\right| \leq e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}}$$

Diese für uns fundamentale Formel gilt für jeden Punkt x des Gebietes $\mathfrak{G}^{(0)}$. Hierbei hängen Q_0 und Q_1 nur von dem Gebiete $\mathfrak{G}^{(0)}$, den $\alpha_\varkappa$, $\varrho_{\varkappa'}$, $a_{\nu 0}$, $a_{\nu 1}$, $\mathfrak{M}$ nur von den Maxima der Funktionen

$$\left| x^2 \left(p_\nu (x) - a_{\nu 0} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right|$$

in $\mathfrak{G}$ ab.

Indem wir λ die Werte $1, 2, \ldots . n$ durchlaufen lassen, erhalten wir ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (A). Denn angenommen, es bestehe eine Beziehung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa = 0 \tag{80}$$

so bezeichne $\varkappa'$ alle diejenigen Indices, zu denen ein Koeffizient $c_{\varkappa'}$ gehört, der von 0 verschieden ist. Sei jetzt α_λ diejenige Zahl unter den $\alpha_{\varkappa'}$, deren reeller Teil größer ist als der der übrigen $\alpha_{\varkappa'}$, so ist

$$\lim_{x=\infty} e^{-a_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa = c_\lambda \tag{81}$$

wenn man sich längs der Achse der positiven reellen Zahlen dem unendlich fernen Punkte nähert. Diese Gleichung widerspricht aber (80). Gibt es unter den $\alpha_{\varkappa'}$ kein α_λ, dessen reeller Teil größer ist als der aller andern $\alpha_{\varkappa'}$, so kann man, da alle $\alpha_\varkappa$ voneinander verschieden sind, einen spitzen Winkel ϑ finden, derart, daß unter den $\alpha_{\varkappa'} e^{i\vartheta}$ eine Zahl $\alpha_\lambda e^{i\vartheta}$ existiert, dessen reeller Teil größer als der aller übrigen Zahlen $\alpha_{\varkappa'} e^{i\vartheta}$ ist. Dann gilt die Beziehung (81), wenn man sich dem Punkte $x = \infty$ auf der Geraden $x = r\, e^{i\vartheta}$ nähert.

Daraus folgt nun, daß sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A) in der Form schreiben läßt

$$y = \sum_{\varkappa=1}^{n} c_\varkappa y_\varkappa \tag{82}$$

Wir behaupten nun folgendes. Gilt die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} y e^{-a_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} = 1 \tag{83}$$

im ganzen Winkelraume

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \delta \tag{84}$$

wo δ eine beliebig kleine von 0 verschiedene positive Zahl bedeutet, so ist

$$y = y_\lambda \tag{85}$$

Es haben $\beta_\varkappa$, $\sigma_\varkappa$, $\mathfrak{r}_\varkappa$, $\omega_\varkappa$ und Λ wieder die Bedeutung der vorigen Paragraphen. Es sei

$$\delta < \frac{\pi}{2} - \Lambda$$

so daß

$$-\pi \leqq \omega_\varkappa \pm \delta \leqq +\pi$$

Es ist jedenfalls

$$\lim_{x=\infty} y_\varkappa e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} = \lim_{x=\infty} e^{\beta_\varkappa x} x^{\sigma_\varkappa} \tag{86}$$

Nähern wir uns jetzt dem unendlich fernen Punkte auf dem Wege

$$x = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

so ist

$$\lim_{x=\infty} e^{\beta_{\varkappa'} x} x^{\sigma_{\varkappa'}} = 0 \tag{87}$$

$$\lim_{x=\infty} e^{\beta_{\varkappa''} x} x^{\sigma_{\varkappa''}} = \infty \tag{88}$$

wenn man unter $\varkappa'$ diejenigen von λ verschiedenen Indices versteht, zu denen $\sphericalangle \omega_{\varkappa'}$ gehören, die der Ungleichung genügen

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \delta + \omega_{\varkappa'} < \frac{3\pi}{2} \tag{89}$$

und unter $\varkappa''$ diejenigen Indices, zu denen $\sphericalangle \omega_{\varkappa''}$ gehören, die der Ungleichung genügen

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \delta + \omega_{\varkappa''} < \frac{\pi}{2} \tag{90}$$

Damit nun aber bei einer Annäherung auf dem Wege

$$x = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

Bedingung (83) erfüllt ist, muß sein wegen (86) und (87)

$$\lim_{x=\infty} (y - c_\lambda y_\lambda) e^{-\alpha_\lambda x} x^{-\rho_\lambda} = \lim_{x=\infty} \sum_{\varkappa''} c_{\varkappa''} e^{\beta_{\varkappa'} \alpha} x^{\sigma_{\varkappa''}} = 1 - c_\lambda \tag{91}$$

Es sei jetzt $\varkappa_0''$ derjenige Index unter den $\varkappa''$, der der Beziehung genügt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta + \omega_{\varkappa_0''}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta + \omega_{\varkappa''}\right)$$

Es folgt dann, da

$$\lim_{x=\infty} e^{-\beta_{\varkappa_0''} x} x^{-\sigma_{\varkappa_0''}} = 0 \qquad \text{für } x = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

aus (91) die Beziehung

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\varkappa''} c_{\varkappa''} e^{(\beta_{\varkappa''} - \beta_{\varkappa_0''}) x} x^{\sigma_{\varkappa''} - \sigma_{\varkappa_0'}} = 0 \qquad \text{für } x = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}$$

Es ist aber

$$\lim_{x=\infty} e^{(\beta_{\varkappa''} - \beta_{\varkappa_0''}) x} x^{\sigma_{\varkappa''} - \sigma_{\varkappa_0''}} = 0$$

außer wenn $\varkappa'' = \varkappa_0''$ ist; es folgt also, daß

$$c_{\varkappa_0''} = 0$$

sein muß.

Entsprechend beweist man nacheinander, daß auch die übrigen Konstanten $c_{\varkappa''}$ gleich Null sein müssen. Aus (91) folgt dann

$$c_\lambda = 1 \tag{92}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\varkappa'''$ bzw. $\varkappa''''$ diejenigen von λ verschiedenen Indices, zu denen $\sphericalangle\, \omega_{\varkappa'''}$ bzw. $\sphericalangle\, \omega_{\varkappa''''}$ gehören, die den Ungleichungen genügen.

$$-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \delta + \omega_{\varkappa'''} < -\frac{\pi}{2} \tag{93}$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \delta + \omega_{\varkappa''''} < -\frac{\pi}{2} \tag{94}$$

Nähern wir uns jetzt dem Punkte ∞ auf dem Wege

$$x = r e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \delta\right)}$$

so gelten die Beziehungen

$$\lim_{x=\infty} e^{\beta_{\varkappa'''} x}\, x^{\sigma_{\varkappa'''}} = 0 \tag{95}$$

$$\lim_{x=\infty} e^{\beta_{\varkappa''''} x}\, x^{\sigma_{\varkappa''''}} = \infty \tag{96}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgert man in Verbindung mit (83) und (86) zunächst, daß

$$\lim_{x=\infty} \sum_{\varkappa''''} c_{\varkappa''''}\, e^{\beta_{\varkappa''''} x}\, x^{\sigma_{\varkappa''''}} = 0$$

sein muß und dann hieraus wieder, daß alle Konstanten $c_{\varkappa''''}$ einzeln verschwinden müssen. Man erkennt aber leicht, daß alle

$$\omega_\varkappa > 0$$

der Bedingung (94) genügen, also Größen $\omega_{\varkappa''''}$ sind, während die

$$\omega_\varkappa < 0$$

wegen (90) Größen $\omega_{\varkappa''}$ sind. Daraus folgt aber, daß alle $c_\varkappa$ außer c_λ verschwinden. Und damit ist, wegen (92), die Behauptung (85) bewiesen.

Das Resultat dieses Kapitels, sowie es uns in den folgenden Kapiteln nützlich sein wird, können wir in folgendem Lehrsatze zusammenfassen.

Lehrsatz. Sei y ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (A), das der Bedingung genügt

$$\lim_{x=\infty} y\, e^{-a_\lambda x}\, x^{-\rho_\lambda} = 1 \tag{97}$$

wenn

$$\omega - \frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \omega + \frac{\pi}{2} - \delta$$

Hierbei sei ω ein beliebiger Winkel, der nur von

$$(2k+1)\pi - \arg(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)$$

— unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden — verschieden sein muß.

Sei jetzt $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}$ das in § 1 definierte Gebiet, das nur von den Größen $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$ abhängt, und ferner noch durch die Voraussetzung eingeschränkt ist, daß die Koeffizienten $p_\nu(x)$ in dem zugehörigen einfach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{G}_\omega$ analytische Funktionen von x sind. Dann gilt die Beziehung (97) auch innerhalb und auf dem Rande des Gebietes $\mathfrak{G}_\omega$. Ferner besteht im Gebiete $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}$ die Ungleichung

$$\left|e^{-\alpha_\lambda x}\, x^{-\varrho_\lambda}\, y\right| \leqq e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}}$$

Hierbei sind Q_0 Zahlen, die nur von den $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$, $a_{\nu 0}$, $a_{\nu 1}$ und der Wahl des Gebietes $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}$ abhängen, während $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke der Werte bedeutet, die die Funktionen

$$\left| x^2 \left(p_\nu(x) - a_{\nu 0} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right|$$

in $\mathfrak{G}_\omega$ annehmen.

Kapitel II.

Untersuchungen über Integrale von Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind.

Zu einer Differentialgleichung $P(y) = 0$ finden wir, wie wir im Kapitel I gesehen haben, ein Fundamentalsystem von n Integralen $y_\varkappa$, die, wenn ω geringfügige Beschränkungen auferlegt sind, für

$$\omega - \frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \omega + \frac{\pi}{2} - \delta$$

den Bedingungen genügen

$$\lim_{x=\infty} y_\varkappa e^{-a_\varkappa x} x^{-\rho_\varkappa} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

Fassen wir jetzt ein bestimmtes $\varkappa = \lambda$ ins Auge, so können wir zunächst erreichen, indem wir durch die Substitution

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x^* = x\, e^{-\iota\omega} \\ y^* = e^{-a_\lambda x}\, x^{-m_\lambda}\, y \end{cases}$$

— unter m_λ eine ganze Zahl $\geqq 0$ verstanden — die Differentialgleichung $P(y) = 0$ in eine Differentialgleichung vom selben Typus $P^*(y^*) = 0$ überführen, daß diese letztere Differentialgleichung ein Integral y^* besitzt, welches für

$$\text{(2)} \qquad -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$$

der Bedingung genügt

$$\lim_{x=\infty} y_\lambda^* x^{-\rho_\lambda^*} = 1$$

Hierbei ist

$$\varrho_\lambda^* = \varrho_\lambda - m_\lambda$$

Es sei jetzt m_λ groß genug, damit

$$\Re(\varrho_\lambda^*) < -1.$$

Wir können uns also im folgenden auf das Studium solcher Integrale beschränken, die für einen Winkelraum (2) einer Bedingung von der Art genügen

(3) $$\lim_{x=\infty} y\, x^{-\rho} = 1$$

wobei

(4) $$\Re(\varrho) < -1.$$

Dazu muß natürlich eine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung gleich 0 sein und dies kommt in den Koeffizienten der Differentialgleichung dadurch zum Ausdruck, daß

(5) $$a_{00} = 0.$$

Wir wollen in diesem Kapitel das Integral, das der Bedingung (13) genügt, kurz mit y ohne jeden Index bezeichnen, ohne übrigens dabei einen eventuell auftretenden konstanten Faktor zu berücksichtigen.

Es wird ferner nach der Bezeichnungsweise des vorigen Kapitels

$$\beta_\varkappa = \alpha_\varkappa - \alpha_\lambda = \alpha_\varkappa$$

Ist die in dem I. Kapitel ω auferlegte Bedingung erfüllt, so ergibt die Transformation (1), daß keine der $n-1$ von 0 verschiedenen Wurzeln $\alpha_\varkappa$ eine negative reelle Zahl ist.

§ 1.

Die Laplacesche Transformation.

Wir fassen in diesem Paragraphen die Hauptpunkte der Poincaréschen Theorie der Laplaceschen Transformation zusammen, die dieser im Journ. of Math. Bd. 7 und in den Acta Math. Bd. 8 entwickelt hatte. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei Picard, Traité d'Analyse t. III, 2. Aufl., S. 382—405 und im § 1 der Hornschen Arbeit, Math. Annalen, Band 50.

Es sei folgende Differentialgleichung vorgelegt

(A′) $$y^{(n)} + p_{m,n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{m0}(x)\, y = 0.$$

Hierbei sind die Koeffizienten $p_{m\nu}(x)$ rationale Funktionen von der Form

(6) $$p_{m\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu}\, x^{-\mu}$$

Nach Multiplikation mit x^m hat (A′) die Form,

(7) $$P_m(y) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu,m-\mu}\, y^{(\nu)}\, x^\mu$$

Hierbei ist

$$a_{n0} = 1, \quad a_{n\mu} = 0, \quad \text{wenn } \mu \geqq 1$$

Aus der Formel (1) der Einleitung folgt

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{x^m} P_m(y) = P(y)$$

Wir beschränken uns wieder der einfacheren Schreibweise halber auf den Fall

$$a_{00} = 0$$

Wir setzen jetzt y in der Form an

$$y = \int_{\mathfrak{L}} v(t)\, e^{tx}\, dt \tag{8}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{L}$ einen Integrationsweg, der längs der Achse der negativ reellen Zahlen vom unendlich fernen Punkt bis zum Nullpunkte läuft, dann diesen im positiven Sinne umkreist und endlich längs der Achse der reellen Zahlen wieder zum Punkte $-\infty$ zurückkehrt.

Wir setzen ferner wieder wie im vorigen Paragraphen voraus, daß keine der $n-1$ von 0 verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung negativ reelle Zahlen sind; also in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{L}$ außer $\alpha = 0$ keine weiteren Wurzeln der charakteristischen Gleichung liegen.

Wir nehmen vorläufig an, daß, wenn der reelle Teil von x groß genug ist, das Integral (8) gleichmäßig konvergiert, ferner, daß die Beziehungen bestehen

$$\left[(t^\nu v(t))^{(\mu)} e^{tx}\right]_{t=-\infty} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{9}$$

Dann ist, wie man mit Hilfe der partiellen Integration leicht einsieht,

$$x^\mu y^{(\nu)} = \int_{\mathfrak{L}} t^\nu v(t)\, x^\mu e^{tx}\, dt = \int_{\mathfrak{L}} t^\nu v(t) \frac{d^\mu (e^{tx})}{dt^\mu} dt \tag{10}$$

$$= (-1)^\mu \int_{\mathfrak{L}} (t^\nu v(t))^{(\mu)} e^{tx}\, dt$$

Setzen wir jetzt

$$L(v) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu a_{\nu, m-\mu} (t^\nu v(t))^{(\mu)} \tag{11}$$

so folgt aus (10), wenn wir den Wert aus (8) für y in (7) einsetzen

$$P_m(y) = \int_{\mathfrak{L}} L(v(t))\, e^{tx}\, dt \tag{12}$$

$P_m(y)$ verschwindet also, wenn $v(t)$ der Differentialgleichung $L(v) = 0$, einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, genügt.

Es mögen nun außerdem noch zwei endliche Konstanten K_1 und K_2 existieren, derart, daß

$$|v^{(\mu)}(t)| \leq K_1 e^{K_2|t|} \qquad (\mu = 0, \ldots, m) \tag{13}$$

wenn t eine negative Zahl ist. Bezeichnet jetzt $\Re(x)$ den reellen Teil von x, so erkennt man, daß, wenn

$$\Re(x) > K_2$$

ist, das Integral (8) wirklich konvergiert und auch die Bedingungen (9) erfüllt sind.

Der Koeffizient von $v^{(\mu)}$ in $L(v)$ lautet:

$$q_0(t) = t^n + a_{n-1,0}\, t^{n-1} + \ldots + a_{10}\, t \tag{14}$$

Diese Gleichung ist die charakteristische Gleichung, die zur Differentialgleichung (A′) gehört. Man erkennt aus ihr, daß die Differentialgleichung $L(v) = 0$ an der Stelle $t = 0$ eine sogenannte Stelle der Bestimmtheit hat. Da alle Koeffizienten von $L(v)$ nach Division durch $q_0(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Pol von nicht höherer als erster Ordnung haben, so besitzt die zu dieser Stelle gehörige determinierende Fundamentalgleichung die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots m-2$, und $\frac{a_{10}}{a_{01}} - 1$. Daraus folgt, daß die Differentialgleichung $L(v) = 0$ ein Fundamentalsystem besitzt, dessen einziges für $t = 0$ singuläres Integral von der Form ist

$$v(t) = t^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} B_\iota\, t^\iota \qquad \sigma = \frac{a_{10}}{a_{01}} - 1 \tag{15}$$

während die übrigen $m - 1$ Integrale sich für $t = 0$ regulär analytisch verhalten. Diese regulären Integrale von $L(v)$ können wir zur Bildung unseres Integrals y nicht verwenden, denn wenn wir sie in (8) einsetzen, so folgt, wie unmittelbar zu sehen, $y = 0$.

Da die Gleichung (14) keine negativ reellen Wurzeln hat, so läßt sich $v(t)$ längs des Integrationsweges beliebig weit fortsetzen, wenn auch die Potenzreihe (15) nur einen endlichen Konvergenzradius hat, wie aus dem Cauchyschen Existenztheorem über Integrale einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung unmittelbar folgt.

Es läßt sich nun auch beweisen, daß $v(t)$, als Lösung der Differentialgleichung $L(v) = 0$, sich durch eine Ungleichung von der Form (13) abschätzen läßt. Der Poincarésche Beweis für diese Tatsache ist allerdings noch etwas kompliziert. Einen sehr einfachen Beweis gibt Herr Liapounoff (1892, Bull. de la Soc. Math. de Charkoff, in russischer Sprache; in französischer Sprache ist der Beweis in den Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1908 erschienen. Der Beweis ist im 3. Bande des Traité d'Analyse von Picard, 2. Aufl., S. 384 und 385, dargestellt, ferner auch von Herrn Horn in seiner Arbeit im 50. Bande der Math. Annalen S. 555). Einen genauen Wert für K_2 gewinnt man aus der Hornschen Arbeit in Crelle, Band 138, bzw. aus unserem I. Kapitel, das die dort erhaltenen Resultate erweitert. Endlich befinden sich im 141. und 142. Bande von Crelle Beweise unseres Satzes von Herrn Perron, die sowohl was die Allgemeinheit der Voraussetzungen über die Differentialgleichung $L(v)$ betrifft, als auch bezüglich der Genauigkeit der Abschätzung am meisten leisten, aber nur für reelle Werte des Argumentes gelten.

Ist jetzt σ keine ganze Zahl, was wir im folgenden als wesentlich immer annehmen wollen, so erhalten wir ein von 0 verschiedenes Integral y der Differentialgleichung (A′), wenn wir den Wert (15) für $v(t)$ in (8) einsetzen.

Sei

$$S = x^{\rho} \sum_{\iota=0}^{\infty} A_{\iota}\, x^{-\iota} \tag{16}$$

diejenige Thomésche Normalreihe, die zu der charakteristischen Wurzel $\alpha = 0$ gehört, so beweist Poincaré, daß für das Integral (8) die Beziehung gilt

$$y \sim C\, S \tag{17}$$

und daß ferner zwischen ϱ und σ, den A_{ι} und B_{ι} die Gleichungen bestehen

$$\sigma = -\varrho - 1 \tag{18}$$

$$B_{\iota} = (-1)^{\iota} \frac{A_{\iota}}{(-\varrho)(1-\varrho)\ldots(\iota-1-\varrho)}, \qquad B_0 = 1 \tag{19}$$

$$C = e^{-\rho\pi i}(e^{-2\pi i\rho} - 1)\frac{1}{\Gamma(-\varrho)} \tag{20}$$

(vgl. die Formeln etwa bei Horn, Math. Annalen, Bd. 50, S. 530 — für ι ist μ, für σ .. λ, für B_{ι} .. A_{μ} geschrieben).

Formel (17) gilt für

$$\Re(x) > K_2$$

Daraus folgt aber, daß die Beziehung besteht

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{C}\, y\, x^{-\rho} = 1 \tag{21}$$

wenn

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

Aus dem Lehrsatze am Schlusse des Kapitels I folgt nun weiter, daß die Beziehungen (17) und (21) auch in dem Gebiete $\mathfrak{G}$ gelten, das einen Winkel von einer Öffnung $> \pi$ enthält.

§ 2.

Aufstellung der Integralgleichung, die mit der Laplaceschen transformierten Differentialgleichung äquivalent ist. Abschätzung für $v(t)$ für endliche Werte des Argumentes.

Für unsere folgenden Zwecke brauchen wir vor allem eine Abschätzung für $v(t)$ in einem Gebiete $\mathfrak{S}$, das durch folgende Ungleichungen definiert ist

$$\Re(t) \leq \frac{1}{h} \lg 2 \tag{22}$$

$$|\Im(t)| \leq \frac{1}{h}\frac{\pi}{2} \tag{23}$$

Hierbei ist h eine beliebige endliche positive Konstante, die aber groß genug gewählt ist, damit in $\mathfrak{S}$ außer der Wurzel $t = 0$ keine der $n - 1$ übrigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (25) enthalten ist.

Um nun zunächst $v(t)$ für jedes noch so große endliche Teilgebiet von $\mathfrak{S}$ abzuschätzen, zeigen wir, daß $v(t)$ einer gewissen Integralgleichung genügen muß, die mit der Differentialgleichung $L(v) = 0$ äquivalent ist. Die Lösung dieser Integralgleichung können wir dann leicht abschätzen.

Wir setzen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu\mu} t^{\nu} = q_{\mu}(t) \tag{24}$$

Dann schreibt sich die Differentialgleichung (11) in der Form

$$L(v) \equiv \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^{m-\mu} \frac{d^{\mu}[q_{m-\mu}(t)\, v(t)]}{dt^{\mu}} = 0 \tag{25}$$

Es sei

$$K(t,z) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{q_{\mu}(z)}{\mu!} (z-t)^{\mu} \tag{26}$$

Dann behaupten wir, daß jede Funktion $v(t)$, die der homogenen linearenIntegralgleichung erster Art vom Volterraschen Typus

$$\int_0^t K(t,z)\, v(z)\, dz = 0 \tag{27}$$

genügt, wofern sie nur m mal differentiierbar ist, ein Integral der Differentialgleichung $L(v) = 0$ ist. Ein sehr einfacher Beweis dieser Tatsache befindet sich in der These des Herrn F. Lalesco (Journ. d. Math., sixième série, vol. 4, p. 136—138).

Durch Differentiation von (27) findet man nämlich zunächst

$$v(t)\, K(t,t) + \int_0^t \frac{\partial K(t,z)}{\partial t} v(z)\, dz = 0$$

und wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial^k K(t,z)}{\partial t^k} = (-1)^k \sum_{\mu=k}^{m} \frac{q_{\mu}(z)}{(\mu-k)!} (z-t)^{\mu-k} \tag{28}$$

$$\left(\frac{\partial^k K(t,z)}{\partial t^k}\right)_{z=t} = (-1)^k q_{\mu-k}(t)$$

so findet man nach k weiteren Differentiationen die Gleichung

$$[q_0(t)\, v(t)]^{(k)} - [q_1(t)\, v(t)]^{(k-1)} + \ldots + (-1)^k q_k(t)\, v(t) + \int_0^t \frac{\partial^{k+1} K(t,z)}{\partial t^{k+1}} v(z)\, dz = 0 \tag{29}$$

Setzen wir jetzt $k = m$, so wird wegen

$$\frac{\partial^{m+1} K(t,z)}{\partial t^{m+1}} = 0$$

das Glied mit dem Integral in (27) verschwinden und wir erhalten

$$[q_0(t)\, v(t)]^{(m)} - [q_1(t)\, v(t)]^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m q_m(t)\, v(t) = 0$$

Diese Differentialgleichung in $v(t)$ ist aber mit (25) identisch. Die Integralgleichung (27) behandeln wir nach den bekannten Methoden, wie sie schon Herr Volterra angegeben hat. Wir folgen der Hornschen Darstellung (Crelles Journ. Bd. 140, S. 125—128).

Setzen wir in (29) $k = 1$, so erhalten wir

$$[q_0(t)\, v(t)]' - q_1(t)\, v(t) + \int_0^t \frac{\partial^2 K(t,z)}{\partial t^2} v(z)\, dz = 0 \tag{30}$$

Aus (14) erkennt man, daß, wenn man setzt

$$\frac{q_0(t)}{t} = q(t)$$

$q(t)$ ein Polynom in t ist, daß für $t = 0$ nicht verschwindet.

Die Division von (30) durch $q(t)$ ergibt

$$[t\, v(t)]' - \frac{q_1(t) - t\, q'(t)}{q(t)} v(t) + \int_0^t \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 K(t,z)}{\partial t^2} v(z)\, dz = 0$$

Setzen wir abkürzungsweise

$$\frac{q_1(t) - t\, q'(t)}{q(t)} = H_1(t) \tag{31}$$

$$\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 K(t\,z)}{\partial t^2} = H_2(t,z), \tag{32}$$

so hat unsere Integralgleichung die einfache Form

$$[t\, v(t)]' - H_1(t)\, v(t) + \int_0^t H_2(t,z)\, v(z)\, dz = 0 \tag{33}$$

$H_1(t)$ bzw. $H_2(t,z)$ sind in jedem endlichen Teilgebiete von $\mathfrak{S}$ reguläre analytische Funktionen von t bzw. von t und z. $H_1(t)$ läßt sich in der Umgebung der Stelle $t = 0$ in die Potenzreihe

$$H_1(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} c_\iota t^\iota \tag{34}$$

entwickeln.

Wir bestimmen zunächst eine Funktion $v_0(t)$, die der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$[t\,v_0(t)]' - H_1(t)\,v_0(t) = 0 \tag{35}$$

genügt. Wir finden

$$v_0(t) = t^{c_0-1}\, e^{\int_0^t \frac{H_1(z)-c_0}{z}\,dz} \tag{36}$$

$$= t^{c_0-1}\, e^{\sum_{\iota=1}^{\infty} c_\iota \frac{t^\iota}{\iota}}$$

$$c_0 = \frac{a_{10}}{a_{01}} \tag{37}$$

Es sei wieder

$$\Re(c_0 - 1) > 0. \tag{38}$$

Wir werden weiter unten sehen, daß diese Ungleichung aus der Annahme

$$\Re(\varrho) < -1$$

folgt.

Wir bestimmen jetzt sukzessiv eine unendliche Reihe von Funktionen v_ν und V_ν durch die Rekursionsformeln

$$V_\nu(t) = \int_0^t H_2(t,z)\,v_\nu(z)\,dz \tag{39}$$

$$v_{\nu+1}(t) = -v_0(t) \int_0^t \frac{V_\nu(z)}{z\,v_0(z)}\,dz \tag{40}$$

Wir behaupten jetzt, daß

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(t) \tag{41}$$

konvergiert und der Integralgleichung (33) und damit auch (27) genügt.

Es sei jetzt $\mathfrak{S}'$ dasjenige Teilgebiet von $\mathfrak{S}$, in dem t der Bedingung

$$|t| \leq T \tag{42}$$

genügt. Hierbei bedeutet T eine beliebig große endliche Zahl.

Ist nun t ein Punkt von $\mathfrak{S}'$, so bleiben die Funktionen

$$\begin{cases} \mathfrak{p}(t) = e^{\sum_{\iota=1}^{\infty} c_\iota \frac{t^\iota}{\iota}} = e^{\int_0^t \frac{H_1(t)-c_0}{z}\,dz} \\ \dfrac{1}{\mathfrak{p}(t)} = e^{-\int_0^t \frac{H_1(z)-c_0}{z}\,dz} \end{cases} \tag{43}$$

beschränkt. Dasselbe gilt für $H_2(t, z)$. Es sei etwa

$$|p(t)| \leqq \mathfrak{P}, \qquad \left|\frac{1}{p(t)}\right| \leqq \mathfrak{Q}, \qquad |H_2(t,z) \leqq \mathfrak{H}_m| \tag{44}$$

wenn z und t Punkte von $\mathfrak{S}'$ sind.

Es sei ferner

$$c_0 - 1 = c' + i\,c'' \tag{45}$$

Die Integration in (39) und (40) führen wir aus, indem wir längs eines Weges integrieren, der geradlinig zwischen 0 und t verläuft. Wir beweisen jetzt durch vollständige Induktion folgende Abschätzungen

$$|v_\nu(t)| \leqq \mathfrak{G}_\nu |t|^{c'+\nu} \tag{46}$$

wobei

$$\mathfrak{G}_\nu = e^{2\pi|c''|}\,\mathfrak{P}\,\frac{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{H}_m\,e^{4\pi|c''|})^\nu}{\nu!\,(c'+1)\,(c'+2)\,\ldots\,(c'+\nu)} \tag{47}$$

Es ist

$$|v_0| \leqq \mathfrak{P}\,e^{2\pi|c''|}\,|t|^{c'}$$

Angenommen, die Richtigkeit von (46) wäre bereits bewiesen, so folgt aus (39) und (40)

$$\begin{aligned} |V_\nu(t)| &\leqq \mathfrak{G}_\nu \mathfrak{H}_m \int_0^t |z|^{c'+\nu}\,|dz| \\ &\leqq \frac{\mathfrak{G}_\nu \mathfrak{H}_m |t|^{c'+\nu+1}}{c'+\nu+1} \end{aligned} \tag{48}$$

$$|v_{\nu+1}| \leqq |t|^{c'}\,\mathfrak{P}\,e^{2\pi|c''|}\,\frac{\mathfrak{G}_\nu \mathfrak{H}_m \mathfrak{Q}}{c'+\nu+1}\int_0^t |z|^{c'+\nu+1-c'-1}\,e^{2\pi|c''|}\,|dz|$$

$$\leqq |t|^{c'}\,\mathfrak{P}\,\frac{\mathfrak{G}_\nu \mathfrak{H}_m \mathfrak{Q}\,e^{4\pi|c''|}}{(\nu+1)\,(c'+\nu+1)}\,|t|^{\nu+1}$$

$$\leqq \mathfrak{G}_{\nu+1}\,|t|^{c'+\nu+1}$$

Aus Formel (46) und (47) folgt nun, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(t)$ gleichmäßig in t konvergiert, wenn t ein Punkt von $\mathfrak{S}'$ ist.

Unter Berücksichtigung von (42) erhalten wir für $v(t)$ folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leqq e^{2\pi|c''|}\,\mathfrak{P}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{H}_m\,e^{4\pi|c''|})^\nu}{\nu!\,(c'+1)\,(c'+\nu)}\,T^{c'+\nu} \\ &\leqq e^{2\pi|c''|}\,\mathfrak{P}\,T^{c'}\,e^{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{H}_m T e^{4\pi|c''|}} \end{aligned} \tag{49}$$

Wir haben noch zu beweisen, daß $v(t)$ tatsächlich der Integralgleichung (33) bzw. (27) genügt.

Aus (40) folgt

$$[t\, v_{\nu+1}(t)]' = H_1(t)\, v_{\nu+1}(t) - V_\nu(t)$$

Da nun

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[H_1(t)\, v_{\nu+1}(t) - V_\nu(t)]$$

wegen (46) und (48) gleichmäßig konvergiert, wenn t in $\mathfrak{S}'$ gelegen ist, so folgt dasselbe für

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[t\, v_{\nu+1}(t)]'$$

Setzen wir jetzt

$$V_{-1} = 0$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von (35)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}[t\, v_\nu(t)]' = \sum_{\nu=0}^{\infty}[H_1(t)\, v_\nu(t) - V_{\nu-1}(t)]$$

Da alle diese Summen gleichmäßig konvergieren, so folgt

$$[t\, v(t)]' = H_1(t)\, v(t) - \int_0^t H_2(t, z)\, v(z)\, dz$$

was zu beweisen war.

Daraus, daß $H_1(t)$ und $H_2(t, z)$ gewöhnliche Potenzreihen von t und z sind, erkennt man jetzt leicht, daß auch

$$t^{1-c_0} v_0(t) \qquad \text{und} \qquad t^{1-c_0} v_\nu(t)$$

Potenzreihen von t sind. Daraus folgt, daß auch

$$t^{1-c_0} v(t)$$

sich im Punkte $t = 0$ regulär analytisch verhält.

Berechnet man nun die Größe ϱ der Formel (16) des § 1 aus der Gleichung

$$C_1 = 0$$

wo C_1 der zweite Koeffizient der Reihe für

$$P_m(S) = x^\rho \sum_{\iota=0}^{\infty} C_\iota\, x^{-\iota}$$

ist, so erhält man unter Berücksichtigung von $a_{00} = 0$

$$\varrho = -\frac{a_{10}}{a_{01}}$$

(vgl. Picard, Traité Analyse, t. 3, S. 301).

Daraus folgt:

$$c_0 = -\varrho \tag{50}$$

Die Bedingung (38) ist also immer erfüllt, wenn

$$\Re(\varrho) < -1.$$

Es war ferner vorausgesetzt, daß ϱ keine ganze Zahl ist. Dasselbe gilt nun auch wegen (50) für $c_0 - 1$. $v(t)$ hat also die Stelle $t = 0$ zum Verzweigungspunkt. Andererseits genügt, wie zu Anfang des Paragraphen bewiesen, $v(t)$ der Differentialgleichung $L(v) = 0$.

Nun haben wir aber im § 1 dieses Kapitels gesehen, daß $L(v) = 0$ nur ein einziges Integral besitzt, das für $t = 0$ nicht regulär analytisch ist, und gerade dieses diente uns zur Konstruktion des Integrals y der Differentialgleichung $P_m(y) = 0$. Daraus folgt aber, daß die Lösung $v(t)$ der Integralgleichung (33) mit der Funktion $v(t)$ des § 12, die wir in das Schleifenintegral (8) eingesetzt haben, bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt. Dieser konstante Faktor ist aber $= 1$. Denn sowohl für das Integral (15) der Differentialgleichung (11) als auch für das Integral (41) der Integralgleichung (33) gilt

$$\lim_{t=0} t^{-\sigma} v(t) = 1$$

denn es ist

$$B_0 = 1$$

$$\lim_{t=0} t^{-\sigma} v_0(t) = 1$$

$$\lim_{t=0} t^{-\sigma} v_\nu(t) = 0 \qquad \nu \geq 1$$

Ferner folgt aus (50) in Verbindung mit (18), daß

$$c_0 - 1 = \sigma,$$

folglich

$$c' = \Re(\sigma)$$
$$c'' = \Im(\sigma).$$

§ 3.

Abschätzung von $v(t)$ für reelle negative Werte des Argumentes von großem absoluten Betrage.

Wir können wegen

$$\Re(c_0 - 1) = \Re(\sigma) > 0$$

das Schleifenintegral (8) für y leicht in ein gewöhnliches Integral verwandeln, und zwar ist

$$y = C' \int_0^{-\infty} v(t)\, e^{tx}\, dt \tag{51}$$

Hierbei ist

$$C' = 1 - e^{2\pi i \sigma} \tag{52}$$

Integrale der Form (51) sind schon häufig Gegenstand eingehender Untersuchung gewesen. Wir benutzen hier ein Resultat des Herrn Pincherle[1]).

Es sei für $\Re(x) \geqq \gamma$ die analytische Funktion y in der Form

$$\frac{a}{x} + \frac{\mu(x)}{x^{1+\theta}} \tag{53}$$

darstellbar, wobei $\mu(x)$ eine für $\Re(x) \geqq \gamma$ beschränkte Funktion ist; dann läßt sich y auf die Form (51) bringen, und zwar ist

$$C' v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} y(\tau)\, e^{-\tau t}\, d\tau \tag{54}$$

Das Integral (51) konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen Teilbereiche des Gebietes $\Re(x) \geqq \gamma' > \gamma$ [2]).

Andererseits hat Herr Lerch[3]) bewiesen, daß die Gleichung

$$\int_0^{-\infty} v(t)\, e^{tx}\, dt = \int_0^{-\infty} v^*(t)\, e^{tx}\, dt$$

für $\Re(x) \geqq \gamma'$ nur dann bestehen kann, wenn $v(t) = v^*(t)$ ist.

Aus den Beziehungen

$$y \sim C \cdot S, \quad \Re(\varrho) < -1$$

die für ein Gebiet $\mathfrak{G}$ gelten, das das Gebiet

$$\Re(x) \geqq \gamma$$

enthält, folgt, daß unser Integral y tatsächlich der Bedingung (53) genügt.

Weiter folgt nun aus den eben angeführten Sätzen der Herren Pincherle und Lerch, daß die in den §§ 1 und 2 dieses Kapitels konstruierte Funktion $v(t)$ tatsächlich mit der Funktion $v(t)$ der Formel (54) identisch ist. In dieser letzteren Darstellung läßt sich nun aber $v(t)$ bequem abschätzen.

---

[1]) S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes. Annales scientifiques de l'école normale supérieure 1905, Bd. 22, S. 9—68, insbes. Chap. II, S. 30—39. Herr Pincherle betrachtet allerdings Integrale von der Form

$$\alpha(x, a) = \int_0^a \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt$$

doch geht dieses Integral durch die Substitution $a = 1$, $t = e^{t^*}$ in die Form (51) über.

[2]) Die Bedingung (53) läßt sich übrigens erheblich abschwächen. Es genügt z. B., daß y für $\Re(x) \geqq \gamma$ beschränkt ist, und sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil von $y(\gamma + i\tau)$ für $\tau > T$ monoton gegen 0 abnehmen, wenn τ sich dem Grenzwerte $+\infty$ bzw. $-\infty$ nähert. Ich denke den Beweis dieses Resultates bei anderer Gelegenheit zu veröffentlichen.

[3]) Acta Mathematica, Bd. XXVII, 1903, S. 345.

Es sei γ so gewählt, daß die Gerade

$$\Re(x) = \gamma$$

vollständig im durchlöcherten Gebiete $\mathfrak{G}^{(0)}$ liegt; dann ist auf dieser Geraden nach dem Lehrsatze am Schlusse des Kapitel I

$$\frac{1}{|C|}\,|x^{-\varrho}\,y| \leqq e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}_m}$$

folglich ist wegen (54)

$$|C'|\,|v(t)| \leq \frac{|C|}{2\pi}\, e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}_m} \cdot e^{\gamma |t|} \cdot \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} |\tau^{\varrho}|\,|d\tau|$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Beziehung nimmt einen endlichen Wert an wegen

$$\Re(\varrho) < -1, \qquad \gamma > 0.$$

Setzen wir

$$Q_2 = \frac{|C|}{2\pi\,|C'|} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} |\tau^{\varrho}|\,|d\tau|$$

so erhalten wir die gewünschte Abschätzung

$$|v(t)| \leqq Q_2\, e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}_m}\, e^{\gamma |t|} \tag{55}$$

Diese Formel gilt nur für reelle negative Werte von t; in ihr hängen Q_0, Q_1 und Q_2 nur von den Größen $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$, $a_{\nu 0}$, $a_{\nu 1}$ und von der Gestalt des Gebietes $\mathfrak{G}$ ab. $\mathfrak{M}_m$ bedeutet eine obere Schranke der Funktionen

$$\left| x^2 \left(p_{m\nu} - a_{\nu 0} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right|$$

im Gebiete $\Re(x) \geqq \gamma$.

Wegen (55) ist die Konvergenz des Integrals (51) in der Halbebene

$$\Re(x) \geqq \gamma' > \gamma$$

absolut und gleichmäßig.

§ 4.

Transformation der Integrationsveränderlichen t.

Wir hatten im vorigen Paragraphen das Integral y von (A′) in der Form erhalten

$$y = C' \int_0^{-\infty} v(t)\, e^{tx}\, dt \tag{51}$$

Wir wollen in diesem Paragraphen das bestimmte Integral (51) in eine für uns zweckmäßigere Form transformieren.

Wir substituieren für die Integrationsveränderliche t die Funktion

$$t = \frac{1}{h} \lg (1 - s) = -\frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s^\nu}{\nu} \tag{56a}$$

$$s = -(e^{ht} - 1) \tag{56b}$$

wo h dieselbe Konstante wie in (22) und (23) bedeutet.

Diese Substitution ist bereits von Herrn Horn in seiner Arbeit im 71. Bande der Math. Annalen S. 513—515 untersucht worden. Er zeigt, daß durch die Transformation (56b) eine Kurve Σ (bei Herrn Horn $\mathfrak{C}$) der t-Ebene, die ganz innerhalb des in § 2 definierten Gebietes $\mathfrak{S}$ gelegen ist, in den Einheitskreis der s-Ebene übergeführt wird (s. Fig. 9). Die Kurve Σ hat die beiden Begrenzungsgeraden von $\mathfrak{S}$, die der Achse der reellen Zahlen parallel sind, zu Asymptoten, und die Begrenzungsgerade, die der Achse der imaginären Zahlen parallel läuft, in ihrem Schnittpunkte mit der reellen Achse zur Tangente. Die Kurve Σ enthält also die Achse der negativen reellen Zahlen ganz im Innern des von ihr eingeschlossenen Gebietes $\mathfrak{S}^*$. Außerdem ist aber die Funktion $t^{-\sigma} v(t)$ für jeden endlichen Punkt t von $\mathfrak{S}^*$ regulär analytisch, da alle Punkte von $\mathfrak{S}^*$ auch Punkte von $\mathfrak{S}$ sind. In der s-Ebene ist nun die Integration statt von 0 bis $-\infty$ längs der Achse der reellen Zahlen von 0 bis 1 zu erstrecken. $t^{-\sigma} v(t)$ wird durch (56) in eine Funktion $w_1(s)$ übergeführt, welche unter Berücksichtigung von (15) folgende Entwicklung zuläßt:

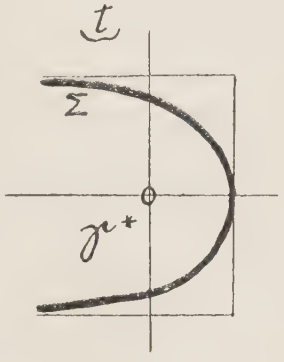


Fig. 9.

$$w_1(s) = \sum_{\iota=0}^{\infty} b_\iota' s^\iota$$

Diese Potenzreihe hat aber den Einheitskreis zum Konvergenzkreis, da $t^{-\sigma} v(t)$ sich im Innern von $\mathfrak{S}^*$ analytisch verhält. t^σ wird durch die Substitution (56) in eine Funktion

$$w_2(s) = s^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} b_\iota'' s^\iota$$

transformiert, deren Entwicklung gleichfalls den Einheitskreis zum Konvergenzkreis hat.

Setzen wir

$$w(s) = w_1(s)\, w_2(s),$$

so gilt für $w(s)$ die Entwicklung

$$w(s) = s^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} b_\iota s^\iota \tag{57}$$

die ebenso wie w_1 und w_2 für $|s| < 1$ konvergiert. $w(s)$ ist die Funktion, in die $v(t)$ durch die Substitution (56) übergeführt wird.

Wir sind jetzt in der Lage, das Integral hinzuschreiben, in das das Integral (51) transformiert wird, wenn wir noch berücksichtigen, daß wegen (56)

$$dt = \frac{-1}{h}\frac{ds}{1-s}$$

wird. Es wird nämlich

$$y = -\frac{C'}{h}\int_0^1 w(s)\,(1-s)^{\frac{x}{h}-1}\,ds \tag{58}$$

Es sei jetzt r eine positive Zahl < 1. Dann wird das Gebiet

$$|s| \leqq r$$

der s-Ebene durch die Transformation (56) in ein im Endlichen gelegenes ovales Gebiet $\mathfrak{S}_r^*$, der t-Ebene übergeführt, das ganz in $\mathfrak{S}^*$ enthalten ist (vgl. Fig.).

Sei ferner T_r das Maximum der absoluten Beträge der in $\mathfrak{S}_r^*$ gelegenen Punkte t. Dann folgt aus Formel (49) des § 2 für $|s| \leqq r$ die Abschätzung

$$|w(s)| \leqq e^{2\pi|c''|}\,\mathfrak{P}\,T_r^{c'}\,e^{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{H}_m T_r}\,e^{4\pi|c''|} \tag{59}$$

Ist jetzt s eine positive reelle Zahl $\leqq 1$, so folgt aus (55) die weitere Abschätzung

$$\begin{aligned} |w(s)| &\leqq Q_2\,e^{Q_0+Q_1\mathfrak{M}_m\,e^{\gamma|t|}} \\ &\leqq Q_2\,e^{Q_0+Q_1\mathfrak{M}_m\left(\frac{1}{1-s}\right)^{\frac{\gamma}{h}}} \end{aligned} \tag{60}$$

da

$$\begin{aligned} |t| &= \frac{1}{h}\,|\lg(1-s)| \\ &= \frac{1}{h}\lg\frac{1}{1-s} \end{aligned}$$

Kapitel III.

Der Grenzübergang $m = \infty$ in der Differentialgleichung $P_m(y) = 0$.

§ 1.

Die Grenzübergänge bei den formalen Reihen.

Wir haben im vorigen Kapitel die Funktionen $y(x)$, $v(t)$ und $w(s)$ und die asymptotische Reihe $S(x)$ betrachtet, die in gewisser Weise durch die Differentialgleichung

$$P_m(y) = 0$$

bestimmt waren. Wir wollen in diesem Kpaitel $y_m(x)$, $v_m(t)$, $w_m(s)$ und $S_m(x)$ schreiben, um die Abhängigkeit dieser Funktionen von dem Index m näher zu untersuchen. Entsprechend werden wir die Koeffizienten der Potenzreihen (16), (15), (57) des Kapitels II und (19) des Kapitels I mit $A_{m\iota}$, $B_{m\iota}$, $b_{m\iota}$ und $C_{m\iota}$ statt A_ι, B_ι ... usw. bezeichnen.

Wir betrachten zunächst die Reihe (vgl. die Reihe (9) Kapitel I § 4)

$$P_m(S_m) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu}\, x^{-\mu}\, S_m^{(\nu)} \tag{61}$$

$$= x^\rho \sum_{\iota=0}^{\infty} C_{m\iota}\, x^{-\iota}$$

die die Größen $\alpha_\varkappa$, $\varrho_\varkappa$ und $A_{m\iota}$ bestimmt.

Wir bemerken nun leicht, daß der Wert der Koeffizienten $C_{m\iota}$ von den Größen $a_{\nu 0}$ ... bis $a_{\nu\iota}$ abhängt, nicht aber von den Koeffizienten $a_{\nu,\iota+1}$, $a_{\nu,\iota+2}$, ... usw.

Die Gleichung

$$C_{m0} = q_0(\alpha) = 0$$

ist eine Gleichung n^{ten} Grades in α, deren Koeffizienten durch die $a_{\nu 0}$ eindeutig bestimmt sind und die die n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ hat. Wegen unserer Voraussetzung (5) im zweiten Kapitel,

$$a_{00} = 0\,,$$

ist eine dieser Wurzeln, etwa α_λ, gleich 0.

$$C_{m1} = 0$$

ist eine Gleichung ersten Grades in ϱ, deren Koeffizienten von α und den $a_{\nu 0}, a_{\nu 1}$ abhängen. Setzen wir jetzt in C_{m1} die Zahl $\alpha = 0$, so erhalten wir den Wert für ϱ, der in der Reihe S_m auftritt. Setzen wir α gleich einer der übrigen Wurzeln α_χ, so ergibt uns die Gleichung

$$C_{m1} = 0$$

$n - 1$ weitere Werte für ϱ_χ, von denen, wie aus den Ausführungen des ersten Kapitels hervorgeht, einige unserer Abschätzungen, nämlich die Größen Q_0 und Q_1, abhängen.

Die Größen α_χ und ϱ_χ sind also durch die Koeffizienten $a_{\nu 0}$ und $a_{\nu 1}$ eindeutig bestimmt; daraus folgt, daß, wenn $m \geqq 1$ ist, zu allen Differentialgleichungen $P_m(y) = 0$ dieselben Größen α_χ und ϱ_χ gehören.

A_{m0} bleibt willkürlich, es werde für alle m gleich 1 gesetzt.

A_{m1} bestimmt sich aus der Gleichung

$$C_{m2} = 0$$

.... $A_{m,\iota-1}$ aus der Gleichung

$$C_{m\iota} = 0$$

Alle diese Gleichungen sind Gleichungen ersten Grades in den zu bestimmenden Größen $A_{m,\iota-1}$. Die Koeffizienten von $C_{m\iota} = 0$ sind durch die Größen $a_{\nu 0} \ldots a_{\nu\iota}$, $\alpha = 0$, ϱ, $A_{m0}, \ldots, A_{m,\iota-2}$ eindeutig bestimmt. Daraus folgt aber, daß die $C_{m\iota}$ und $A_{m,\iota-1}$ für $m = \iota$ einen gewissen Wert C_ι und $A_{\iota-1}$ annehmen, den sie auch beibehalten, wenn m beliebig wächst.

Sei jetzt S die asymptotische Reihe, die der Differentialgleichung (A) des ersten Kapitels

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{x^m} P_m(y) = P(y) = 0$$

formal genügt, so folgt aus den eben gemachten Bemerkungen über die Gleichung $C_{m\iota} = 0$, daß wir für $S(x)$ die Entwicklung erhalten

$$S(x) = x^\varrho \sum_{\iota=0}^{\infty} A_\iota x^{-\iota} \tag{62}$$

Aus den Gleichungen (20) und (52) des Kapitels II folgt nun, daß auch die Größen C und C', die in den Potenzreihen für $v_m(t)$ bzw. in den Integraldarstellungen (51) und (58) für y_m auftreten, falls $m \geqq 1$, und aus (19), daß auch die $B_{m,\iota-1}$, falls $m \geqq \iota$, von m unabhängig werden. Es bezeichne $B_{\iota-1}$ den Wert, den die $B_{m,\iota-1}$ für $m \geqq \iota$ annehmen.

Wir erkennen auch leicht, daß die Wahl der Gebiete $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^{(0)}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_r^*$ für $m \geqq 1$ von m nicht mehr abhängen.

Denn das Gebiet $\mathfrak{G}$ hängt von der Wahl des $\sphericalangle \tau$ und der Größe γ ab. Der $\sphericalangle \tau$ ist, wie aus Formel (34) und (35) des I. Kapitels folgt, nur durch die α_χ nach oben hin be-

schränkt. γ und τ waren ferner noch durch die Bedingungen bestimmt, daß die Koeffizienten $p_{m\nu}(x)$ im Gebiete $\mathfrak{G}$ analytisch sein sollten. Wir nehmen vorläufig

$$\gamma > R$$

an, wo R den größten der Konvergenzradien der Koeffizienten

$$p_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^{-\mu}$$

bedeutet.

Außerdem wurde aber noch verlangt, daß die Nullstellen der Wronskyschen Determinante Δ der n-Funktionen $e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1}, \ldots, e^{\alpha_n x} x^{\varrho_n}$ nicht auf der Kurve $\Re(x) = \gamma$ liegen, und soweit sie innerhalb $\mathfrak{C}$ gelegen sind, sollten sie aus dem Gebiete $\mathfrak{G}$ herausgehoben werden, um $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^{(0)}$ überzuführen.

Also auch diese Bedingung hängt offenbar nur von den $\alpha_\varkappa$ und $\varrho_\varkappa$ ab, läßt sich also für alle $m \geqq 1$ gleichzeitig erfüllen.

Das Gebiet $\mathfrak{S}$ der t-Ebene war durch die Ungleichungen definiert

$$\Re(t) \leqq \frac{1}{h} \lg 2 \tag{22}$$

$$|\Im(t)| \leqq \frac{1}{h} \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

h sollte groß genug gewählt werden, damit in $\mathfrak{S}$ keine Stellen $\alpha_\varkappa$ außer $\alpha_\lambda = 0$ gelegen sind. Die Größe h, die also auch nur von den $\alpha_\varkappa$ abhängt, kann demzufolge gleichfalls unabhängig von m gewählt werden.

Wir haben ferner die Funktionen $v_m(t)$ einer Transformation (56) unterworfen, in der nur die Konstante h auftrat, die also von m unabhängig war, und zwar wurde die Funktion $v_m(t)$ in die Funktion (57)

$$w_m(s) = s^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} b_{m\iota} s^\iota$$

übergeführt. $b_{m\iota}$ ist nun aber gleich einem Aggregat

$$b_{m\iota} = \sum_{\varkappa=0}^{\iota} c_{\iota\varkappa} B_{m\varkappa} \tag{63}$$

wobei die Konstanten $c_{\iota\varkappa}$ nur von der Substitution (56), nicht aber von m abhängen.

Schreiben wir nun

$$b_{\iota-1} = b_{\iota,\iota-1}$$

so finden wir

$$\begin{cases} b_{\iota-1} = \sum_{\varkappa=0}^{\iota-1} c_{\iota\varkappa} B_{\iota\varkappa} \\ \qquad = \sum_{\varkappa=0}^{\iota-1} c_{\iota\varkappa} B_\varkappa \end{cases} \tag{64}$$

Aus (63) folgt, daß die

$$b_{\iota-1} = b_{m,\iota-1}$$

sind, wofern nur $m \geq \iota$.

Wir setzen jetzt

$$w(s) = s^{\sigma} \sum_{\iota=0}^{\infty} b_{\iota} s^{\iota} \tag{65}$$

und wollen im folgenden Paragraphen beweisen, daß diese Potenzreihe den Einheitskreis zum Konvergenzkreis hat, und daß

$$\lim_{m=\infty} w_m(s) = w(s) \tag{66}$$

ist.

Wir bemerken endlich noch, daß auch das Gebiet $\mathfrak{S}_r^*$ von m unabhängig ist, da es nur von der Transformation (56) und von der Zahl r abhängt.

§ 2.

Beweis, daß die Potenzreihe für $w(s)$ im Innern des Einheitskreises konvergiert, und daß $\lim_{m=\infty} w_m(s) = w(s)$ ist.

Wir hatten am Ende des vorigen Kapitels folgende Abschätzungen für die Funktionen $w_m(s)$ erhalten. Es war

$$|w_m(s)| \leq e^{2\pi|c''|} T_r^{c'} \mathfrak{P}\, e^{T_r \mathfrak{P} \mathfrak{Q} \mathfrak{H}_m e^{4\pi|c''|}} \tag{59}$$

wenn $|s| \leq r < 1$ ist und

$$|w_m(s)| \leq Q_2\, e^{Q_0 + Q_1 \mathfrak{M}_m \left(\frac{1}{1-s}\right)^{\frac{\gamma}{h}}} \tag{60}$$

wenn s eine positive reelle Zahl ≤ 1 ist.

In diesen Formeln hängen nur die Größen $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{H}_m$ von m ab. Denn T_r war als die größte Entfernung des Nullpunktes von einem Punkte von $\mathfrak{S}_r^*$ definiert. Q_0, Q_1 und Q_2 hängen, wie in dem Lehrsatz am Schlusse des I. Kapitels ausdrücklich bemerkt wurde, nur von den α_χ und ϱ_χ, $a_{\nu 0}$, $a_{\nu 1}$ und von der Gestalt von $\mathfrak{G}^{(0)}$ ab. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind, wie aus (31), (43) und (44) folgt, eindeutig durch die Polynome $q_0(t)$ und $q_1(t)$ bestimmt, deren Koeffizienten ihrerseits wieder nur von den $a_{\nu 0}$ und $a_{\nu 1}$ abhängen. c' und c'' endlich sind wegen (45) und (50) eindeutig mit ϱ gegeben.

$\mathfrak{M}_m$ war eine beliebige obere Schranke der Funktionen

$$\left| x^2 \left(p_{m\nu}(x) - a_{\nu o} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right|$$

in dem Gebiete

$$\Re(x) \geq \gamma.$$

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{M}$ die größte der n-Zahlen

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} |a_{\nu\mu}|\, \gamma^{-\mu+2}$$

Nunmehr ist $\mathfrak{M}$, das jetzt von m unabhängig ist, sicherlich eine obere Schranke aller Funktionen

$$\left| x^2 \left(p_{m\nu}(x) - a_{\nu 0} - \frac{a_{\nu 1}}{x} \right) \right|$$

für

$$|x| \geqq \gamma,$$

also erst recht für alle x des Gebietes $\Re(x) \geqq \gamma$ sind. Man kann also $\mathfrak{M}$ in die Ungleichung (60) an Stelle von $\mathfrak{M}_m$ einsetzen.

$\mathfrak{H}_m$ bedeutete eine obere Schranke für die Funktionen

$$H_2(t,z) = \frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 K_m(t,z)}{\partial t^2}$$

wenn t und z Punkte von $\mathfrak{S}_r^*$ waren.

Nach Formel (28) aus Kapitel II § 3 finden wir

$$\frac{\partial^2 K_m(t,z)}{\partial t^2} = \sum_{\mu=2}^{m} \frac{q_\mu(z)}{(\mu-2)!} (z-t)^{\mu-2} \tag{67}$$

hierbei war

$$q_\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu\mu} t^\nu$$

Nach einem bekannten Satze über Potenzreihen existiert eine Konstante $\mathfrak{a}$, derart, daß

$$|a_{\nu\mu}| \leqq \mathfrak{a}\, \gamma^\mu \tag{68}$$

ist für alle ν.

Dies ergibt dann

$$\begin{cases} |q_\mu(t)| \leqq \mathfrak{a}\, \gamma^\mu \sum_{\nu=0}^{n} T_r^\nu \\ \qquad\quad \leqq T_r^*\, \mathfrak{a}\, \gamma^\mu \end{cases} \tag{69}$$

wenn wir setzen

$$T_r^* = \sum_{\nu=0}^{n} T_r^\nu$$

Daraus folgt dann aber

$$\left| \frac{\partial^2 K_m(t,z)}{\partial t^2} \right| \leqq \mathfrak{a}\, T_r^* \gamma^2 \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{(2\, T_r \gamma)^{\mu-2}}{(\mu-2)!}$$

$$\leqq \mathfrak{a}\, T_r^* \gamma^2\, e^{2 T_r \gamma}$$

und diese Abschätzung gilt für alle m.

Bezeichne jetzt $\mathfrak{q}_r$ das Maximum von $\frac{1}{q(t)}$, wenn t ein Punkt von $\mathfrak{S}_r^*$ ist und sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{q}_r \mathfrak{a} T_r^* \gamma^2 e^{2T_r \gamma} \tag{70}$$

so finden wir

$$\mathfrak{H}_m \leqq \mathfrak{H}$$

Setzen wir endlich

$$\mathfrak{D}_1 = e^{2\pi|c''|} \mathfrak{P} T_r^{c'} e^{T_r \mathfrak{P} \mathfrak{D} \mathfrak{H} e^{4\pi|c''|}} \tag{71}$$

$$\mathfrak{D}_2 = Q_2 e^{Q_1 \mathfrak{M}} + Q_0 \tag{72}$$

so können wir die Ungleichungen (59) und (60) durch folgende zwei ersetzen

$$|w_m(s)| \leqq \mathfrak{D}_1 \tag{73}$$

wenn $|s| \leqq r$ ist und

$$|w_m(s)| \leqq \mathfrak{D}_2 \left(\frac{1}{1-s}\right)^{\frac{\gamma}{h}} \tag{74}$$

wenn s eine reelle positive Zahl $\leqq 1$ ist.

Hierbei sind die Größen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ durch die Koeffizienten $p_\nu(x)$ der Differentialgleichung (A) eindeutig bestimmt.

Wir sind nunmehr in der Lage, allein mit Hilfe der Abschätzung (73) die Behauptung der Formel (66) zu beweisen.

Es war nach den Untersuchungen des § 1 dieses Kapitels

$$w_m(s) = \sum_{\iota=0}^{m-1} b_\iota s^{\iota+\sigma} + \sum_{\iota=m}^{\infty} b_{m\iota} s^{\iota+\sigma} \tag{75}$$

Hieraus folgt nach der bekannten Cauchyschen Abschätzungsformel für Koeffizienten von Potenzreihen unter Berücksichtigung von (73)

$$\begin{cases} |b_\iota| \leqq \mathfrak{D}_1 r^{-\iota} \left|(r e^{i\vartheta})^{-\sigma}\right| \\ \quad \leqq e^{2\pi|c''|} \mathfrak{D}_1 r^{-\iota-c'} \end{cases} \tag{76}$$

Und diese Abschätzung gilt für jedes noch so große ι; aus Formel (75) folgt zwar die Bedingung $\iota \leqq m-1$, da aber in (75) m beliebig groß sein kann, so gilt (76) für jedes noch so große ι.

Aus (76) folgt unmittelbar die absolute Konvergenz der Reihe

$$w(s) = \sum_{\iota=0}^{\infty} b_\iota s^{\sigma+\iota} \tag{65}$$

wenn

$$|s| < r$$

denn

$$\sum_{\iota=0}^{\infty} |b_\iota s^\iota| \leqq e^{2\pi|c''|} r^{-c'} \mathfrak{D}_1 \sum_{\iota=0}^{\infty} \left(\frac{|s|}{r}\right)^\iota$$

Ebenso leicht erkennt man jetzt, daß für $|s| \leq r - \delta$ die Funktionen $w_m(s)$ gleichmäßig in s gegen $w(s)$ konvergieren, wenn man berücksichtigt, daß die Cauchysche Formel auch die Abschätzung

$$|b_{m\,\iota}| \leq e^{2\pi|c''|}\, r^{-c'}\, \mathfrak{Q}_1\, r^{-\iota}$$

für alle noch so großen m und ι ergibt.

Denn es ist nunmehr

$$\begin{aligned} |w - w_m| &\leq \sum_{\iota=m}^{\infty} |b_\iota - b_{m\,\iota}|\, |s^{\sigma+\iota}| \\ &\leq 2\, e^{2\pi|c''|}\, r^{-c'}\, \mathfrak{Q}_1\, |s^\sigma| \sum_{\iota=m}^{\infty} \left(\frac{r-\delta}{r}\right)^\iota \\ &\leq 2\, e^{4\pi|c''|}\, \mathfrak{Q}_1\, \frac{r}{\delta} \left(\frac{r-\delta}{r}\right)^m \end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts, der von s nicht mehr abhängt, kann nun durch Vergrößerung von m beliebig klein gemacht werden, womit die gleichmäßige Konvergenz für $|s| \leq r - \delta$ bewiesen ist. Da man aber nun zu jedem $|s| < 1$ ein r finden kann, derart, daß

$$|s| < r < 1$$

ist, so folgt, daß $w_m(s)$ gegen $w(s)$ gleichmäßig in s konvergiert, sofern nur

$$|s| \leq 1 - \delta$$

ist, unter δ eine beliebige kleine von 0 verschiedene positive Zahl verstanden.

Wenden wir jetzt auf $w(s)$ die Transformation (56) an, so wird $w(s)$ in eine Funktion $v(t)$ übergeführt, und zwar ist, wie aus den Formeln (63), welche die eindeutige Abhängigkeit der b_ι von den B_ι zeigen, leicht folgt

$$v(t) = t^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} B_\iota\, t^\iota \tag{77}$$

Ferner konvergieren die $v_m(t)$ gleichmäßig gegen $v(t)$ in jedem endlichen Teilbereiche $\mathfrak{S}_r^*$ von $\mathfrak{S}^*$.

Setzen wir jetzt

$$K(t,z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q_\mu(z)}{\mu!}\,(z-t)^\mu \tag{78}$$

so konvergieren wegen $|q_\mu(z)| \leq \mathfrak{a}\, \gamma^\mu \sum_{\nu=0}^{n} |z|^\nu$ die Funktionen

$$K_m(t,z) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{q_\mu(z)}{\mu!}\,(z-t)^\mu$$

gleichmäßig gegen $K(t, z)$, wenn t und z in einem endlichen Teilbereiche von $\mathfrak{S}$ gelegen sind. Folglich ist

$$\lim_{m=\infty} \int_0^t K_m(t, z)\, v_m(z)\, dz = \int_0^t K(t, z)\, v(z)\, dz$$

Unsere Funktion $v(t)$ genügt also wegen der Beziehung (27) von Kapitel II § 2 der homogenen Integralgleichung erster Art vom Volterraschen Typus

$$\int_0^t K(t, z)\, v(z)\, dz = 0 \tag{79}$$

Wenn wir also für unsere Grenzfunktion $v(t)$ auch keine lineare Differentialgleichung angeben konnten, der diese genügen soll, da die Laplacesche transformierte Differentialgleichung für den Fall $m = \infty$ von unendlich hoher Ordnung wird, so haben wir doch statt dieser die funktionale Beziehung (79) gefunden, die unsere Funktion $v(t)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

§ 3.

Beweis, daß $y = \lim_{m=\infty} y_m$ existiert und ein Integral der Differentialgleichung (A) ist. Entwicklung von y in eine konvergente Fakultätenreihe.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Abschätzung (74) zeigen, daß die Integrale y_m gleich mäßig gegen eine Funktion

$$y = -\frac{C'}{h} \int_0^1 w(s)\, (1-s)^{\frac{x}{h}-1}\, ds \tag{80}$$

konvergieren, wofern

$$\Re(x) \geqq \gamma_1 > \gamma$$

das heißt, wir wollen zeigen, daß wir zu einem vorgegebenen beliebig kleinen ε eine Zahl m_0 finden können, die nur von ε, nicht aber von x abhängt, derart, daß für $\Re(x) \geqq \gamma_1$

$$|y - y_m| \leqq \varepsilon,$$

wenn $m \geqq m_0$.

Es sei

$$\gamma_1 = \gamma + \eta \tag{81}$$

und δ eine beliebig kleine positive von 0 verschiedene Zahl.

Nimmt jetzt s reelle positive Werte an, die der Ungleichung

$$1 - \delta \leqq s \leqq 1 \tag{82}$$

genügen, so gilt für alle m die Abschätzung (74)

$$|w_m(s)| \leq \mathfrak{Q}_2 \left(\frac{1}{1-s}\right)^{\frac{\gamma}{h}}$$

folglich ist auch

$$\lim_{m=\infty} |w_m(s)| = |w(s)| \leq \mathfrak{Q}_2 \left(\frac{1}{1-s}\right)^{\frac{\gamma}{h}} \tag{83}$$

Daraus folgt aber, wenn $1 - \delta < a \leq 1$ ist,

$$\lim_{a=1} \left| -\frac{C'}{h} \int_{1-\delta}^{a} w_m(s) (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right| \leq \frac{|C'|}{h} \mathfrak{Q}_1 \int_{1-\delta}^{1} (1-s)^{\frac{\gamma_1-\gamma}{h}-1}$$

$$\leq \frac{|C'|}{h} \mathfrak{Q}_1 \frac{h}{\eta} \delta^{\frac{\eta}{h}}$$

Setzen wir jetzt

$$\frac{|C'|}{\eta} \mathfrak{Q}_1 \delta^{\frac{\eta}{h}} = \varepsilon_1$$

so finden wir

$$\lim_{a=1} \left| -\frac{1}{h} \int_{1-\delta}^{a} w_m(s) (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right| \leq \varepsilon_1 \tag{84}$$

und zwar wird ε_1 mit δ beliebig klein. Diese Ungleichung gilt aber wegen (83) auch für

$$\lim_{m=\infty} w_m(s) = w(s)$$

Sei jetzt δ so klein gewählt, daß

$$2\varepsilon_1 < \varepsilon$$

und bezeichne ε_2 die Differenz $\varepsilon - 2\varepsilon_1$.

Da nun für $|s| \leq 1 - \delta$ die Funktionen $w_m(s)$ gleichmäßig gegen $w(s)$ konvergieren, ferner $\Re(\sigma) > -1$ ist, so können wir ein m_0 finden, derart, daß für alle $m \geq m_0$ die Ungleichung gilt

$$\left| -\frac{C'}{h} \int_{0}^{1-\delta} |w(s) - w_m(s)| (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right| \leq \varepsilon_2 \tag{85}$$

Aus (84) und (85) folgt nun, daß die y_m gegen das Integral (80) gleichmäßig konvergieren, wenn

$$\Re(x) \geq \gamma_1$$

denn es ist

$$|y - y_m| \leq \left| \frac{C'}{h} \int_0^{1-\delta} [w(s) - w_m(s)] (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right| + \left| \frac{C'}{h} \int_{1-\delta}^{1} w(s) (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right| +$$

$$+ \left| \frac{C'}{h} \int_{1-\delta}^{1} w_m(s) (1-s)^{\frac{x}{h}-1} ds \right|$$

$$|y - y_m| \leq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\leq \varepsilon$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen y_m gegen die Funktion y für

$$\Re(x) \geq \gamma + \eta$$

bewiesen.

Da die y_m und y in jedem endlichen Teilgebiete des Konvergenzbereiches analytische Funktionen von x sind, so konvergieren auch die Ableitungen von y_m gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von y. Es konvergiert also $p_{m\nu}(x)\, y_m^{(\nu)}$ gleichmäßig gegen $p_\nu(x)\, y^{(\nu)}$ in jedem endlichen Teilgebiete des Bereiches $\Re(x) \geq \gamma + \eta$.

Es ist daher

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{x^m} P_m(y_m) = P(y) = 0$$

Folglich ist y tatsächlich ein Integral der Differentialgleichung $P(y) = 0$.

Wir wollen jetzt noch für das Integral (80) einen größeren Konvergenzbereich finden.

Es sei r_0 eine reelle Zahl derart, daß für

$$\Re(x) > r_0$$

die $p_\nu(x)$ analytische Funktionen von x sind, während auf der Geraden

$$\Re(x) = r_0$$

einige Singularitäten der Koeffizienten $p_\nu(x)$ liegen mögen.

Ist jetzt η eine beliebig kleine positive von 0 verschiedene Zahl, so behaupten wir, daß das Integral (80) in der Halbebene $\mathfrak{B}$

$$\Re(x) \geq r_0 + \eta$$

gleichmäßig konvergiert.

Aus dem in Kapitel II § 3 zitierten Satze des Herrn Pincherle folgt nämlich, da das Integral in jedem endlichen Teilbereiche der Halbebene $\mathfrak{B}$ regulär analytisch ist und für den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ der Bedingung

$$\lim_{x=\infty} x^{-\rho} y = 1$$

genügt, daß y tatsächlich eine Darstellung

$$y = \int_0^{-\infty} \varphi(t)\, e^{tx}\, dt$$

zuläßt, die in der Halbebene $\mathfrak{B}$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Transformieren wir jetzt das Integral (80) durch die Substitution (56) auf die Poincarésche Form, so erhalten wir bis auf einen konstanten Faktor

$$y = \int_0^{-\infty} v(t)\, e^{tx}\, dt \tag{86}$$

wobei $v(t)$ die Reihe (77) des vorigen Paragraphen bedeutet und der funktionalen Beziehung (79) genügt.

Aus dem Eindeutigkeitssatz des Herrn Lerch (Kap. II § 3) folgt aber nun, daß bis auf einen konstanten Faktor $v(t) = \varphi(t)$ ist, daß also (86) und damit auch (80) tatsächlich, wie behauptet, in der Halbebene $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert.

Interessanter aber ist es, mit Herrn Horn (Math. Annalen Bd. 71, S. 511—523) die Darstellung (80) des Integrals y zu benutzen, um y in eine konvergente Fakultätenreihe zu entwickeln.

Herr Horn folgert zunächst aus der Ungleichung (83) mit Hilfe der Hadamardschen Theorie der Ordnung einer Funktion auf dem Konvergenzkreis (Journ. de Math. 1892, S. 154—186), daß folgende Beziehung besteht

$$\lim_{s=1} \left(\sum_{\iota=0}^{\infty} |b_\iota\, s^{\sigma+\iota}| \right) |1-s|^{\frac{\gamma}{h}+1+\delta} = 0 \tag{87}$$

(vgl. S. 516—519 der zitierten Hornschen Arbeit). Hierbei sei

$$\gamma = r_0 + \eta.$$

Bezeichne jetzt abkürzungsweise R_ν den Rest

$$-\frac{1}{h} \int_0^1 \left(\sum_{\iota=\nu+1}^{\infty} b_\iota\, s^{\sigma+\iota} \right) (1-s)^{\frac{x}{h}-1}\, ds$$

dann finden wir

$$y = -\frac{1}{h} \sum_{\iota=0}^{\nu} \int_0^1 b_\iota s^{\sigma+\iota} (1-s)^{\frac{x}{h}-1}\, ds + R_\nu \tag{88}$$

Mit Hilfe von Formel (87) beweist nun Herr Horn, daß $R_\nu(x)$ mit wachsendem ν absolut gegen 0 konvergiert, wenn

$$\Re\left(\frac{x}{h}\right) \geqq \frac{\gamma}{h} + 1 + \delta', \qquad \delta' > \delta$$

d. h.

$$\Re(x) \geqq \gamma + h + \delta' h\,.$$

Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Γ-Funktionen finden wir nun

$$\int_0^1 s^{\sigma+\iota}(1-s)^{\frac{x}{h}-1}\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}\right)\Gamma(\sigma+\iota+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{h}+\sigma+\iota+1\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}\right)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{h}+\sigma+1\right)} \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots.(\sigma+\iota)}{\left(\frac{x}{h}+\sigma+2\right)\left(\frac{x}{h}+\sigma+1\right)\ldots.\left(\frac{x}{h}+\sigma+\iota\right)}$$

Hieraus ergibt sich aber für unser Integral y folgende Entwicklung

$$(89)\quad y = -\frac{C'\Gamma(\sigma+1)}{h}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h}+\sigma+1\right)}\sum_{\iota=0}^{\infty} b_\iota \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots.(\sigma+\iota)}{\left(\frac{x}{h}+\sigma+1\right)\left(\frac{x}{h}+\sigma+2\right)\ldots.\left(\frac{x}{h}+\sigma+\iota\right)}$$

Diese Reihe konvergiert absolut, allerdings nur in einem Bereiche, der durch die Ungleichung

$$\Re(x) \geqq \gamma + h + \delta$$

definiert ist, in x, während die Integraldarstellung

$$y = \int_0^{-\infty} v(t)\, e^{tx}\, dt$$

in dem größeren Bereich $\mathfrak{B}$

$$\Re(x) \geqq r_0 + \eta$$

konvergiert.

Schlußbemerkung.

Wir können, wenn wir jetzt unsere Ausführungen auf die Differentialgleichung (A) vor der Transformation (1) zu Anfang des Kapitels II anwenden, das Resultat unserer Arbeit in folgenden Worten zusammenfassen.

Sei

$$P(y) \equiv y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0$$

eine beliebige lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten $p_\nu(x)$ sich in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ nach negativen Potenzen von x entwickeln lassen.

Es habe ferner die zu dieser Differentialgleichung gehörige charakteristische Gleichung keine mehrfache Wurzel.

Dann existieren n divergente Reihen

$$S_\lambda = e^{\alpha_\lambda x}\, x^{\varrho_\lambda} \sum_{\iota=0}^{\infty} A_{\lambda\iota} x^{-\iota}$$

die der Differentialgleichung formal genügen.

Es existiert ferner ein Fundamentalsystem von n Integralen y_λ, die zu den S_λ in der Beziehung stehen

$$y_\lambda \sim S_\lambda$$

Sei ω ein beliebiger Winkel, der nur durch die Ungleichungen eingeschränkt ist

$$\pi - \omega \neq 2k\pi + \arg(a_\varkappa - a_\lambda) \qquad \text{für alle } \varkappa \text{ und } \lambda.$$

Sei r_0 die Entfernung des Nullpunktes von der Begrenzungsgeraden einer Halbebene, die denjenigen Strahl zur Symmetrieachse hat, der mit der Achse der reellen Zahlen den $\sphericalangle\, \omega$ bildet, und sei r_0 so gewählt, daß in jener Halbebene alle $p_\nu(x)$ analytische Funktionen von x sind, während auf der Begrenzungsgeraden

$$\Re(x\, e^{-i\omega}) = r_0$$

wenigstens eine singuläre Stelle der $p_\nu(x)$ liegen möge.

Es sei ferner für jedes λ die in S_λ auftretende Zahl ϱ_λ keine ganze Zahl; wir bestimmen nunmehr ganze positive Zahlen m_λ derart, daß

$$\Re(\varrho_\lambda - m_\lambda) \leqq 0$$

Sei endlich h eine nach den Vorschriften von Kapitel II § 2 passend gewählte Konstante, so ergeben sich nunmehr bis auf einen konstanten Faktor folgende zwei wichtige Darstellungen für das Integral y_λ

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x}\, x^{m_\lambda} \int_{g_\omega^*} v_\lambda^*(t)\, e^{t x}\, dt$$

$$= x^{m_\lambda} \int_{g_\omega} v_\lambda(t)\, e^{t x}\, dt$$

$$= e^{\alpha_\lambda x}\, x^{m_\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + 1\right)} \sum_{\iota=0}^{\infty} b_{\lambda\iota} \frac{(\sigma_\lambda + 1)(\sigma_\lambda + 2) \ldots (\sigma_\lambda + \iota)}{\left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + 1\right) \ldots \left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + \iota\right)}$$

Das zweite Integral geht aus dem ersten hervor, indem wir die Integrationsveränderliche t durch $t - \alpha_\lambda$ ersetzen. g_ω bzw. g_ω^* bedeuten einen Strahl, der sich vom Punkte α_λ bzw. 0 ins ∞ erstreckt und mit der Achse der positiven reellen Zahlen den $\sphericalangle \pi - \omega$ bildet.

$v_\lambda(t)$ genügt einer gewissen funktionalen Beziehung und läßt folgende Entwicklung zu

$$v_\lambda(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} B_{\lambda\iota} (t - \alpha_\lambda)^{\iota - \sigma_\lambda}$$

die für hinreichende kleine $|t - \alpha_\lambda|$ konvergiert. Hierbei ist wegen (18)

$$\sigma_\lambda = -\varrho_\lambda + m_\lambda - 1$$

und wegen (19) und (20) bis auf einen konstanten Faktor

$$B_{\lambda\iota} = (-1)^\iota \frac{A_{\lambda\iota}}{\Gamma(-\varrho_\lambda + m_\lambda + \iota)}$$

Die $b_{\lambda\iota}$ bestimmen sich aus den $B_{\lambda\iota}$ mit Hilfe der Formeln (63) von Kapitel III § 1.

Die Integraldarstellung für x konvergiert für

$$\Re(x\, e^{-i\omega}) \geqq r_0 + \eta$$

während die Entwicklung von y_λ in eine Fakultätenreihe nur für

$$\Re(x\, e^{-i\omega}) \geqq r_0 + h + \eta$$

konvergiert.

Die Integraldarstellung für y läßt sich durch Einführung eines Schleifenweges für g_ω noch etwas vereinfachen, indem man sich von dem Faktor x^{m_λ} befreit.

Es bezeichne $\mathfrak{L}_{\lambda\omega}$ einen Integrationsweg, der sich vom unendlich fernen Punkte längs g_ω bis zum Punkte α_λ erstreckt, diesen im positiven Sinne umkreist und längs

g_ω zum Punkte ∞ zurückkehrt; dann ist bis auf einen konstanten Faktor

$$y_\lambda = \int_{\mathfrak{L}_{\lambda\omega}} x^{m_\lambda} v_\lambda(t)\, e^{tx}\, dt$$

Die partielle Integration ergibt nun

$$y_\lambda = -\int_{\mathfrak{L}_{\lambda\omega}} x^{m_\lambda - 1} v_\lambda'(t)\, e^{tx}\, dt$$

$$= (-1)^{m_\lambda} \int_{\mathfrak{L}_{\lambda\omega}} v_\lambda^{(m_\lambda)}(t)\, e^{tx}\, dt$$

Es ist aber

$$v_\lambda(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^\iota \frac{A_{\lambda\iota}}{\Gamma(\iota + \sigma_\lambda + 1)} (t - \alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda + \iota}$$

$$v_\lambda'(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^\iota \frac{(\sigma_\lambda + \iota)\, A_{\lambda,\iota}}{\Gamma(\iota + \sigma_\lambda + 1)} (t - \alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda + \iota - 1}$$

$$= \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^\iota \frac{A_{\lambda\iota}}{\Gamma(\iota + \sigma_\lambda)} (t - \alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda - 1 + \iota}$$

Schließlich findet man

$$v_\lambda^{(m_\lambda)}(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^\iota \frac{A_{\lambda\iota}}{\Gamma(\iota + \sigma_\lambda - m_\lambda + 1)} (t - \alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda - m_\lambda + \iota}$$

$$= \sum_{\iota=0}^{\infty} (-1)^\iota \frac{A_{\lambda\iota}}{\Gamma(-\varrho_\lambda + \iota)} (t - \alpha_\lambda)^{-\varrho_\lambda - 1 + \iota}$$

Schreiben wir jetzt wieder $v_\lambda(t)$ statt $v_\lambda^{(m_\lambda)}(t)$, so erhalten wir bis auf das Vorzeichen für y_λ die Darstellung

$$y_\lambda = C_\lambda \int_{\mathfrak{L}_{\lambda\omega}} v_\lambda(t)\, e^{tx}\, dt$$

Setzen wir ferner wieder

$$v_\lambda(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} B_{\lambda\iota} (t - \alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda + \iota}$$

so sind σ_λ, $B_{\lambda\iota}$ und C_λ durch die Formeln (18), (19), (20) von Kapitel II § 1 bestimmt, ganz gleich ob der reelle Teil von $\varrho_\lambda \gtrless -1$ ist, wofern nur ϱ_λ keine ganze Zahl ist.

Diese Darstellung läßt sich in folgende Fakultätenreihe entwickeln

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + 1\right)} \sum_{\iota=0}^{\infty} b_{\lambda\iota} \frac{(\sigma_\lambda + 1)(\sigma_\lambda + 2) \ldots (\sigma_\lambda + \iota)}{\left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + 1\right) \ldots \left(\frac{x}{h} + \sigma_\lambda + \iota\right)}$$

Die $b_{\lambda\iota}$ bestimmen sich bis auf einen konstanten Faktor aus den $B_{\lambda\iota}$ mit Hilfe der Formeln (63) von Kapitel III § 1.

Nachtrag.

Zusammenhang der Birkhoffschen Resultate mit denen unserer Arbeit.

Auf die Arbeiten des Herrn Birkhoff[1]) bin ich leider erst nach Fertigstellung meiner Arbeit aufmerksam geworden. Ich will hier kurz angeben, wie man aus den Birkhoffschen Ergebnissen das Hauptresultat unserer Arbeit ableiten kann.

Das fundamentale Birkhoffsche Theorem lautet in der verbesserten Form, wie er es in der Arbeit der Mathematischen Annalen bewiesen hat, etwa folgendermaßen:

Es sei ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung vom Range $m+1$ gegeben.

$$y_\iota' = \sum_{\varkappa=1}^{n} p_{\iota\varkappa}(x)\, y_\varkappa \qquad (\iota = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

Hierbei sei

$$p_{\iota\varkappa} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\iota\varkappa}^{(\mu)}\, x^{m-\mu} \tag{2}$$

Es seien ferner $q_{\iota\varkappa}(x)$ n^2 Funktionen, die für $x = \infty$ regulär analytisch sind, und zwar derart, daß

$$\lim_{x=\infty} q_{\iota\varkappa} = \begin{cases} 0 & \text{für } \iota \neq \varkappa \\ 1 & \text{,, } \iota = \varkappa \end{cases} \tag{3}$$

Außerdem sei die Determinante der $q_{\iota\varkappa}$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = \infty$ von 0 verschieden.

Setzen wir

$$y_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{n} q_{\iota\varkappa}(x)\, Y_\varkappa \tag{4}$$

so wird durch diese Transformation nach Multiplikation mit x das System (1) in das System

$$x\, Y_\iota' = \sum_{\varkappa=1}^{n} P_{\iota\varkappa}(x)\, Y_\varkappa \tag{5}$$

übergeführt.

---

[1]) Transact. of the American Mathematical Society 1909, Bd. 10, S. 436—470; 1913, Bd. 14, S. 462—476; ferner Mathematische Annalen 1913, Bd. 74, S. 122—139.

Das Birkhoffsche Theorem sagt nun aus, daß sich die $q_{\iota x}$ so bestimmen lassen, daß die $P_{\iota x}$ Polynome von nicht höherem Grade als $m+1$ werden.

Das System (5) läßt sich verhältnismäßig leicht behandeln. Herr Birkhoff hat in seiner zitierten Arbeit der Transactions vom Jahre 1909 dieses System genau untersucht. Am einfachsten ist der Fall $m = 0$, der für uns einzig in Betracht kommt. Hier führen die im Kapitel II § 1 unserer Arbeit geschilderten Poincaréschen Methoden der Laplaceschen Transformation vollständig zum Ziele.

Man erhält auf diese Weise n Systeme von Integralen Y_x in der Form

$$Y_{\lambda x} = \int_{\mathfrak{L}_\lambda} v_{\lambda x}(t)\, e^{t x}\, dt$$

$v_{\lambda x}$ läßt in der Umgebung der Stelle $t = \alpha_\lambda$ die Entwicklung in folgende Potenzreihe zu

$$v_{\lambda x} = (t-\alpha_\lambda)^{\sigma_\lambda} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_{\lambda\iota}^{(x)}}{\Gamma(\sigma_\lambda+\iota+1)} (t-\alpha_\lambda)^\iota$$

Ferner folgt aus dieser Darstellung für $Y_{\lambda x}$, daß

$$Y_{\lambda x} \sim e^{\alpha_\lambda x} x^{-\sigma_\lambda-1} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_{\lambda\iota}^{(x)}}{x^\iota} \tag{6}$$

Diese liefern uns jetzt unter Anwendung der Transformation (4) n Systeme y_ι der Form

$$y_{\lambda\iota} = \sum_{x=1}^{n} q_{\iota x} \int_{\mathfrak{L}_\lambda} v_{\lambda x}(t)\, e^{t x}\, dt$$

Wir nehmen wieder an, daß das vorgelegte System so transformiert ist, daß

$$\Re(\sigma_\lambda) > 0$$

dann können wir das Schleifenintegral in ein gewöhnliches bestimmtes Integral verwandeln und wir erhalten

$$Y_{\lambda x} = e^{\alpha_\lambda x} \int_0^\infty v_{\lambda x}(t)\, e^{t x}\, dt \tag{7}$$

$$v_{\lambda x} = t^{\sigma_\lambda} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_{\lambda\iota}^{(x)}}{\Gamma(\sigma_\lambda+\iota+1)} t^\iota \tag{8}$$

Bekanntlich läßt sich nun die Differentialgleichung (A), die wir in unserer Arbeit untersucht haben, als ein System n linearer Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (1) auffassen, indem wir $y_\lambda^{(\mu)} = y_{\lambda,\mu+1}$ setzen; es wird hierbei $m = 0$. Wir erhalten also nach den Birkhoffschen Sätzen ein Fundamentalsystem der vorgelegten

Differentialgleichung (A) in folgender Darstellung

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} \sum_{\varkappa=1}^{n} q_\varkappa(x) \int_0^{-\infty} v_{\lambda\varkappa}(t)\, e^{t x}\, dt \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} &\lim_{x=\infty} q_\lambda(x) = 1 \\ &\lim_{x=\infty} q_\varkappa(x) = 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned} \tag{10}$$

Der Unterschied dieser Birkhoffschen Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (A) von derjenigen, die wir in unserer Arbeit erhalten haben, scheint zunächst nur formal zu sein. Doch ist zu berücksichtigen, daß sich die Koeffizienten der Entwicklungen von den $q_\varkappa$ und $v_{\lambda\varkappa}$ nicht ohne weiteres berechnen lassen, während bei unserer Darstellung

$$y_\lambda = e^{\alpha_\lambda x} \int_0^{-\infty} v_\lambda(t)\, e^{t x}\, dt \tag{11}$$

die Koeffizienten der Potenzreihe für $v_\lambda(t)$ in der Umgebung der Stelle $t = 0$ in einfachster Weise durch die Koeffizienten der formalen Lösung der Differentialgleichung (A) bestimmt waren.

Wir können nun aber die Darstellung (10) leicht in (11) überführen, indem wir einige elementare Sätze der Borelschen Theorie der divergenten Reihen[1]) benutzen.

Ist

$$y \sim \frac{1}{x} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_\iota}{x^\iota} \tag{6'}$$

ist ferner

$$y = \int_0^{-\infty} \varphi(t)\, e^{t x}\, dt \tag{7'}$$

und ist endlich in der Umgebung von $t = 0$

$$\varphi(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_\iota t^\iota}{\iota!} \tag{8'}$$

so nennt Herr Borel die Reihe $\frac{1}{x} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_\iota}{x^\iota}$ summierbar (sommable) und die Funktion $\varphi(t)$ die zu jener Reihe assoziierte Funktion.

Wir wollen eine Reihe auch summierbar nennen, wenn diese statt der einfachen Form (6') die etwas allgemeinere Form (6) hat, wenn die Funktion y statt (7') die Dar-

[1]) Emile Borel: Séries divergentes. Paris 1901.

stellung (7) zuläßt und endlich die assoziierte Funktion $\varphi(t)$ sich in die Potenzreihe (8) statt (8′) entwickeln läßt. Der Fall (6′) erscheint dann als der Spezialfall $\sigma = 0$.

Herr Borel nennt nun weiter die Reihe (6′) bzw. (6) für y absolut summierbar, wenn für alle μ

$$\int_0^{-\infty} |\varphi^{(\mu)}(t)|\, e^{t\,x}\, dt$$

konvergiert. Der Borelsche Satz lautet nun:

Sind

$$y \sim x^{-\sigma-1} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A_\iota}{x^\iota} \qquad z \sim x^{-\rho-1} \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{B_\iota}{x^\iota}$$

absolut summierbare Reihen, so ist

$$w = yz \sim x^{-\sigma-\rho-2} \sum_{\iota=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=0}^{\iota} \frac{A_\iota B_{\iota-\varkappa}}{x^\iota} \tag{12}$$

Ferner ist die Reihe (12) selbst summierbar.

Die Richtigkeit der Beziehung (12) folgt unmittelbar aus der Poincaréschen Definition der asymptotischen Gleichung.

Der Beweis für die Summierbarkeit der Reihe (12) läßt sich nach Herrn Borel folgendermaßen führen.

Es ist

$$y = \int_0^{-\infty} \varphi(t)\, e^{t\,x}\, dt \qquad z = \int_0^{-\infty} \psi(t)\, e^{t\,x}\, dt$$

wobei

$$\begin{cases} \varphi(t) = t^\sigma \sum_{\iota=0}^{\infty} \dfrac{A_\iota}{\Gamma(\sigma+\iota+1)}\, t^\iota \\ \psi(t) = t^\rho \sum_{\iota=0}^{\infty} \dfrac{B_\iota}{\Gamma(\varrho+\iota+1)}\, t^\iota \end{cases} \tag{13}$$

Da y und z absolut summierbar sind, so folgt (vgl. Borel, l. c. S. 103)

$$w = yz = \int_0^{-\infty} \int_0^{-\infty} \varphi(a)\, \psi(b)\, e^{(a+b)x}\, da\, db$$

Substituieren wir

$$a = tz$$
$$b = t(1-z)$$

so erhalten wir

$$w = \int_0^{-\infty} e^{x\,t}\, t \left(\int_0^1 \varphi(tz)\, \psi[t(1-z)]\, dz \right) dt$$

Setzen wir jetzt

$$\chi(t) = t\int_0^1 \varphi(tz)\,\psi[t(1-z)]dz$$

so finden wir

$$(14)\quad \begin{cases} \chi(t) = \int_0^1 \sum_{\iota=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \dfrac{A_\iota}{\Gamma(\iota+\sigma+1)}\dfrac{B_\varkappa}{\Gamma(\varkappa+\varrho+1)}\, t^{\sigma+\rho+\iota+\varkappa+1} z^{\iota+\sigma}(1-z)^{\varkappa+\rho}\,dz \\ \quad = \sum_{\iota=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\iota} \dfrac{A_\iota B_{\iota-\varkappa}}{\Gamma(\sigma+\varrho+\iota+2)}\, t^{\sigma+\rho+\iota+1} \end{cases}$$

nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Γ-Funktion.

Vergleichen wir (14) mit (12), so folgt, daß $\chi(t)$ in der Tat die zu der Reihe (12) assoziierte Funktion ist.

Die Potenzreihe (14) für $\chi(t)$ konvergiert übrigens, wie leicht zu erkennen, mindestens in dem kleineren der Konvergenzkreise der Entwicklungen (13) für φ und ψ.

Wie Herr Borel, l. c. S. 100, bemerkt, ist eine Funktion, die für $x = \infty$ regulär analytisch ist und außerdem dort verschwindet, sicherlich absolut summierbar. Dies gilt aber für die Funktionen $q_1 - 1$, $q_2 \ldots . q_n$ der Formel (9) wegen (10). Ferner läßt sich leicht zeigen, daß die $Y_{\lambda\varkappa}$ der Formel (7) auch absolut summierbar sind. Dann ist aber nach dem eben bewiesenen Lehrsatz auch

$$q_1(x)\int_0^{-\infty} v_{\lambda 1}(t)\,e^{tx}\,dt = \int_0^{-\infty} v_{\lambda 1}(t)\,e^{tx}\,dt + (q_1(x)-1)\int_0^{-\infty} v_{\lambda 1}(t)\,e^{tx}\,dt$$

ferner

$$p_\varkappa(x)\int_0^{-\infty} v_{\lambda\varkappa}(t)\,e^{tx}\,dt \qquad \text{für } \varkappa = 2, \ldots., n$$

summierbar, d. h. es gibt eine Funktion $v^*_{\lambda\varkappa}(t)$, derart, daß

$$(15)\qquad q_\varkappa(x)\int_0^{-\infty} v_{\lambda\varkappa}(t)\,e^{tx}dt = \int_0^{-\infty} v^*_{\lambda\varkappa}(t)\,e^{tx}\,dt$$

Dabei läßt $v^*_{\lambda\varkappa}(t)$ die Entwicklung zu

$$v^*_{\lambda\varkappa}(t) = t^{\sigma_\lambda+2}\sum_{\iota=0}^{\infty} C^{(\varkappa)}_{\lambda\iota}\,t^\iota \qquad \text{für } \varkappa = 2, \ldots., n$$

$$v^*_{\lambda 1}(t) = t^{\sigma_\lambda}\sum_{\iota=0}^{\infty} C^{(1)}_{\lambda\iota}\,t^\iota$$

Setzen wir jetzt

$$(16)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} v^*_{\lambda\varkappa}(t) = v_\lambda(t) = \sum_{\iota=0}^{\infty} b_{\lambda\iota}\,t^{\sigma_\lambda+\iota}\ ^{1})$$

so erhalten wir für y_λ in der Tat die gesuchte Darstellung (11).

---

[1]) In Kap. II § 1 und ff. war $B_{\lambda\iota}$ statt $b_{\lambda\iota}$ geschrieben worden.

$v_\lambda(t)$ ist die zu einer Reihe S_λ assoziierte Funktion, die der Bedingung genügt

$$y_\lambda \sim S_\lambda$$

Dann kann aber S_λ nichts anderes als eine formale Lösung der Differentialgleichung (A) sein.

Hiermit ist über die Entwickelbarkeit von $v_\lambda(t)$ in eine Potenzreihe an der Stelle $t = 0$ ebenso viel, wie in unserer Arbeit bewiesen, und zwar sind, wie uns scheint, die Birkhoffschen Methoden einfacher als die unsrigen.

Das einfache Resultat, daß $v_\lambda(t)$ einer Integralgleichung

$$\int_0^t K_\lambda(t,z)\, v_\lambda(z)\, dz = 0 \tag{17}$$

genügt, können wir aber nicht auf diesem Wege ableiten.

Man kann dies jetzt nachträglich mit den Methoden unserer Arbeit durch Grenzübergang in der Differentialgleichung $P_m(y) = 0$ finden, braucht jetzt aber dazu nur die Abschätzung (59) von Kapitel II § 4, die allein ausreicht, die gleichmäßige Konvergenz der $v_m(t)$ gegen $v(t)$ zu beweisen, woraus dann die Bedingung (17) für $v(t)$ folgt (vgl. Kapitel III § 2).

Noch einfacher erscheint aber die Methode, die Herr Horn[1]) zur Einführung der Integralgleichung benutzt.

Zum Schlusse wollen wir noch folgendes bemerken. Geht man von der Tatsache aus, daß auf Grund des in Kapitel II § 3 angeführten Theorems des Herrn Pincherle das Integral y_λ der Differentialgleichung $P(y) = 0$ jedenfalls eine Darstellung von der Art

$$y_\lambda = e^{a_\lambda x} \int_0^{-\infty} v_\lambda(t)\, e^{tx}\, dt$$

zuläßt, — woraus aber noch keineswegs folgt, daß sich $v_\lambda(t)$ für $t = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt —, so kann man unter Benutzung der eben zitierten Hornschen Methode zeigen, daß $v_\lambda(t)$ der Integralgleichung (17) genügen muß, und daraus läßt sich dann unschwer ableiten, daß $v_\lambda(t)$ an der Stelle $t = 0$ die Entwicklung (16) zuläßt.

Diese direkte Art, die Differentialgleichung (A) zu behandeln, scheint uns die allereinfachste zu sein. Wir denken sie in einer weiteren Veröffentlichung ausführlicher darzustellen.

---

[1]) Crelles Journal, 1914, Bd. 144, S. 167—189. Die Hornsche Arbeit ist erst nachdem ich meine Dissertation der Fakultät eingereicht habe, erschienen; ich bin also auf die Idee, die Laplacesche transformierte Differentialgleichung durch eine Integralgleichung zu ersetzen, unabhängig von Herrn Horn gekommen.

Lebenslauf.

Ich, Hans Ludwig Hamburger, evangelischer Konfession, wurde als Sohn des Justizrats und Notars Karl Hamburger und seiner Ehefrau Margarete, geb. Levy, am 5. August 1889 zu Berlin geboren. Nachdem ich zuerst 3 Jahre die Vorschule besucht hatte, trat ich im Oktober 1898 in die Sexta des Kgl. Französischen Gymnasiums zu Berlin ein, das ich Oktober 1907 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich beschloß nun, mich dem Studium der Mathematik zu widmen, das ich seit Oktober 1907 bis jetzt ohne Unterbrechung betrieben habe. Ich habe die Universitäten zu Berlin, Lausanne, Göttingen und München besucht und dort die Vorlesungen folgender Herren gehört: Amstein, Cassierer, Dumas, Frobenius, Geiger, Hilbert, Husserl, Klein, Landau, Lichtenstein, Lindemann, Minkowski †, Nelson, Pfänder, Planck, Pringsheim, Rosenthal, Rubens, Schottky, Schur, Schwarz, Simmel, Sommerfeld, Stumpf, Töplitz, Voß, Wölfflin, Zermelo. Allen diesen Herren bin ich zu Dank verpflichtet, insbesondere aber Herrn Geheimrat Pringsheim für das große Interesse, das er meinen Studien angedeihen ließ. Seiner Anregung verdankt auch die Dissertation ihre Entstehung, da er meine Aufmerksamkeit auf das Gebiet der asymptotischen Reihen gelenkt hat.